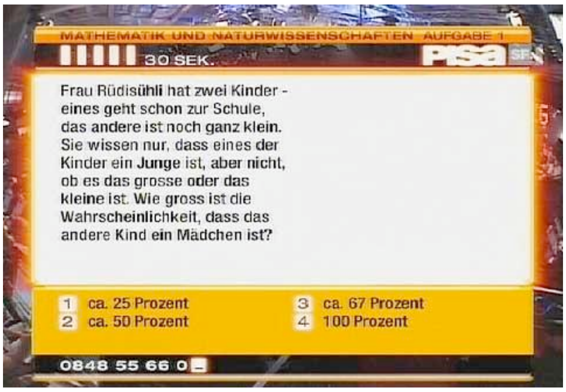
Das Mädchen-Junge-Problem oder der $\frac{2}{3}$ - Irrtum

Thomas Bachmann, Kantonsschule Musegg

Einleitung

In der Sendung „Kampf der Kantone" des Schweizer Fernsehens vom 22.Januar 2006 galt es unter anderem die folgende Aufgabe (ab nun Pisa-Aufgabe genannt) zu lösen:



„Diese Aufgabe kenne ich doch aus meiner Schulzeit", schoss es mir durch den Kopf und ohne lange zu überlegen, setzte ich überzeugt auf Antwort 3.

Der Moderator Ueli Schmezer gab mir kurze Zeit später Recht und lieferte gleich auch die Erklärung mit.

Es gibt grundsätzlich 4 Fälle: MM
MJ
JM
JJ

Alle sind gleichwahrscheinlich, der 1.Buchstabe entspricht dem älteren, der 2.Buchstabe dem jüngeren Kind. Nun weiss man, dass mindestens ein Kind ein Junge ist, also fällt MM weg und es bleiben noch MJ
JM
JJ

da bei 2 (von 3) Fällen das 2.Kind ein Mädchen ist, beträgt die W'keit 2/3 bzw. ca. 67%.

Nur eine kleine Minderheit der Mitratenden im Studio gelangte zu dieser Lösung, fast alle hatten natürlich auf Antwort 2 getippt. „Eine ideale Aufgabe zur Einführung der Wahrscheinlichkeitsrechnung", dachte ich mir, ich kann meine Schüler verblüffen und gleichzeitig meine Fachkompetenz wieder einmal eindrücklich unter Beweis stellen ☺.

Einige Monate später stellte ich diese Aufgabe im Unterricht, die meisten Schüler akzeptierten meine Erklärung, auch wenn es ihnen irgendwie nicht restlos klar zu sein schien. Ein Schüler war mit meinen Erläuterungen aber scheinbar nicht zufrieden und fragte mich: „Wie gross wäre dann die Wahrscheinlichkeit, wenn man nun noch wüsste, dass der Junge das ältere der beiden Kinder ist?"
„Die Wahrscheinlichkeit wäre dann 50%", antwortete ich, „denn dann wäre nur noch JM und JJ möglich". Noch während ich diese Erklärung abgab, traf mich der Blitz der Erkenntnis: „Irgend etwas kann hier nicht stimmen", gab ich dem Schüler als 2.Antwort und versprach der Klasse, dass ich nochmals über die Lösung dieser Aufgabe nachdenken würde.

Wo liegt das Problem?

Wenn die Lösung der Pisa-Aufgabe 67% wäre und man nun den Jungen noch fragen würde, ob er der ältere oder der jüngere der beiden Geschwister ist, so wäre die Wahrscheinlichkeit ja nachher 50%, wenn der Junge sagen würde, er wäre der ältere (so suggeriert es zumindest die Formulierung der Pisa-Aufgabe bzw. die Erklärung des Moderators wäre ja dann wohl, dass nur noch JM und JJ in Frage kämen). Genau so wäre aber die Wahrscheinlichkeit 50%, wenn der Junge sagen würde, er wäre der jüngere. Mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeit ist in jedem Fall 50%, dass das andere Kind ein Mädchen ist, sobald man weiss, ob der Knabe das jüngere oder das ältere Kind ist.

Dies führt zu folgender paradoxen Situation: Kennt man das Alter des Jungen nicht, ist die Wahrscheinlichkeit 67%, dass das andere Kind ein Mädchen ist, da man andererseits weiss, dass der Junge das ältere oder das jüngere Kind ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit aber gleichzeitig 50%, dass das andere Kind ein Mädchen ist. Ein mehr oder weniger offensichtlicher Widerspruch.

Da dieser Argumentation nur wenige Schüler folgen konnten, startete ich folgenden Erklärungsversuch: Nehmen wir einmal an, wir könnten dem Jungen aus der Aufgabe einige Fragen stellen.

1) „Wie heisst du?“
2) „Hast du Mathematik gerne?“
3) „Welches ist dein Lieblingshobby?“

Keine Antwort wird uns irgendeine Auskunft geben über das Geschlecht des anderen Kindes von Frau Rüdisühli.
Anders sieht es mit folgenden Fragen aus:

4) „Spielst du lieber Fussball als dein Geschwister?“
5) „Bist du in der Schule fleissiger als dein Geschwister?“

Da Mädchen im Allgemeinen weniger gern Fussball spielen als Jungen und meist fleissiger sind, können uns die Antworten auf diese Fragen Anhaltspunkte über das Geschlecht des 2.Kindes liefern.
Wie sieht es nun mit folgender Frage aus?

6) „Ist dein Geschwister älter als du?“

Die Antwort auf diese Frage liefert uns absolut keine Auskunft über das Geschlecht des 2.Kindes, denn (z.B.) Mädchen haben ja keine Angewohnheit älter (oder jünger) als ihr Bruder zu sein.

Das heisst, die Lösung der Pisa-Aufgabe verändert sich nicht, wenn man noch zusätzlich weiss, ob der Junge das ältere (oder das jüngere) der 2 Kinder ist.
Wer nun also behauptet, die Lösung der Pisa-Aufgabe sei 67%, der muss nun auch eine Erklärung liefern, dass mit dem Zusatzwissen (Junge ist älter oder jünger) die Lösung immer noch 67% beträgt.

Da dies relativ schwierig sein könnte, werden wir besser zeigen, dass es vernünftiger ist, als Lösung der Pisa-Aufgabe 50% anzugeben.

Wo steckt nun aber der Fehler in der (durchaus logisch scheinenden) Argumentation des Fernsehmoderators?

Genaue Formulierung beachten

Unter der Annahme, dass Geburten unabhängig voneinander sind mit P(M)=P(J)=0.5 lassen sich 2 verschiedene Varianten für das „Mädchen-Junge-Problem" angeben:

Variante A: Aus der Menge aller Familien, welche 2 Kinder haben und mindestens eines davon ein Junge ist, wird zufällig eine ausgewählt. Wie gross ist die W'keit, dass die Kinder „gemischtgeschlechtlich" (also MJ oder JM) sind?

Lösung: $\frac{2}{3}$ (*)

Eine mögliche Umsetzung dieser Variante in eine praktische Aufgabe könnte so aussehen:

A1) Am Elternabend im Knabeninternat plaudert Frau Müller mit einer anderen Mutter, welche sich als Frau Rüdisühli vorstellt. Frau Müller fragt Frau Rüdisühli im Verlaufe des Gesprächs: „Ist ihr Sohn auch ein Einzelkind?" „Nein", entgegnet Frau Rüdisühli, „ich habe noch ein 2.Kind."
Wie gross ist die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist?

(*) $\Omega = \{MJ, JM, JJ\}$ Da alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, ist

$P(\{MJ, JM\}) = \frac{2}{3}$

Variante B: Aus der Menge aller Familien, welche 2 Kinder haben, wird zufällig eine ausgewählt. Man erfährt zufällig das Geschlecht eines der beiden Kinder, angenommen es sei ein Junge.
Wie gross ist die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist?

Lösung: $\frac{1}{2}$ (**)

Mögliche Umsetzungen dieser Variante in eine praktische Aufgabe könnten so aussehen:

B1) Eine alleinerziehende Mutter mit 2 Kindern ist neu in die Nachbarswohnung der Familie Müller eingezogen. Frau Müller weiss nicht, ob die Kinder Mädchen oder/und Jungen sind. Als Frau Müller an der Nachbarstüre mit dem neuen Namensschild Rüdisühli vorbeigeht, öffnet sich diese und ein Junge erscheint. Frau Müller fragt ihn: "Bist du neu hier eingezogen?" „Jawohl", antwortet der Junge.
Wie gross ist die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist?

B2) Im Migros trifft Frau Müller eine ehemalige Schulkollegin (nennen wir sie Frau Rüdisühli) an, von welcher sie seit über 10 Jahren nichts mehr gehört hat. Frau Rüdisühli hält einen kleinen Jungen an der Hand. „Du hast also schon ein Kind?", fragt Frau Müller Frau Rüdisühli. „Nicht nur eines, sogar schon zwei", entgegnet Frau Rüdisühli. Wie gross ist die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist?

(**) Eine ausführliche Erklärung findet sich in [1], eine mathematisch weniger präzise, dafür für die Schüler verständlichere Erklärung folgt weiter unten.

Bemerkung 1: Die W'keit bleibt bei allen drei Aufgaben dieselbe, falls man noch zusätzlich wüsste, ob der Junge das ältere oder das jüngere der beiden Kinder ist.

Bemerkung 2: Praktische Aufgaben vom Aufgabentyp A sind sehr künstlich und kommen in der Praxis kaum vor, eine Situation wie im Aufgabentyp B beschrieben liegt aber durchaus im Bereich des Möglichen. Zur welcher Variante die Pisa-Aufgabe gehört, lässt sich nicht mit Sicherheit entscheiden (zu unklar ist deren Formulierung), müsste man sich festlegen, würde ich Variante B wählen.

[1] Norbert Henze, Stochastik für Einsteiger, 6.Auflage, S.113/114

(**) Erklärung für Schüler

Man bastle 4 gleichgrosse Kärtchen, male die Vorderseite jeweils rot, die Rückseite blau an und notiere die Buchstaben J und M folgendermassen auf die Kärtchen:

Vorderseite (rot)	Rückseite (blau)
M	M
M	J
J	M
J	J

rot = älteres Kind, blau = jüngeres Kind

Man mischt nun die Karten, zieht zufällig eine und legt sie auf den Tisch, man sieht also nur die eine Seite der Karte und weiss nicht, was auf der anderen ist.
Angenommen, wir haben ein blaues J vor uns liegen. Das heisst, wir wissen, dass das jüngere Kind ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das andere Kind (also das ältere) ein Mädchen? Schauen wir die Übersicht oben an, sehen wir, dass es 2 Fälle gibt mit einem blauen J, bei einem Fall ist auf der Rückseite ein rotes M, beim anderen Fall ein rotes J, d.h. die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist, beträgt 1/2 bzw. 50%.

Dies ist aber noch nicht die Pisa-Aufgabe (bzw. exakter: der Aufgabentyp Variante B), denn wir wissen ja dort nicht, ob der Junge älter oder jünger ist. Wir machen darum das gleiche Experiment nochmals, legen aber eine spezielle Brille an, mit welcher man die Farben rot und blau nicht unterscheiden kann.
Angenommen, wir ziehen wieder ein Kärtchen, legen es auf den Tisch und erblicken ein J. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich auf der Rückseite ein M?
Wieder schaue ich die obige Übersicht an und sehe, dass es 4 Fälle gibt mit einem J, bei 2 Fällen steht auf der anderen Seite ein M, bei 2 Fällen steht auf der anderen Seite ein J, d.h. die W'keit, dass das andere Kind ein Mädchen ist, beträgt 2/4 bzw. 50%.

Das Mädchen-Junge-Problem in Schulbüchern

Leider sind auch in vielen Schulbüchern Varianten der Pisa-Aufgabe abgedruckt, oft mit falscher Lösung oder aber so unklarer Formulierung, dass die Aufgabe gar nicht gelöst werden kann.

Ein Beispiel:

Roland weiss, dass Familie Meier zwei Kinder hat, wovon wenigstens eines ein Knabe ist. Welche Wahrscheinlichkeit kann er sich ausrechnen, dass beide Kinder Knaben sind?
(angegebene Lösung: $\frac{1}{3}$)
Kommentar: Formulierungen wie „Roland weiss" sind unklar, da nicht bekannt ist, woher dieses Wissens stammt. Es wäre z.B. denkbar, dass sich folgender Dialog zwischen Roland und Frau Meier abgespielt hat:

Roland: Haben Sie 2 Kinder?
Frau Meier: Ja
Roland: Ist wenigstens ein Kind ein Knabe?
Frau Meier: Ja

In diesem Fall wäre die Lösung der Aufgabe tatsächlich 33%, doch aus dem Aufgabentext geht dies nun wirklich nicht hervor; viel plausibler ist, dass Roland per Zufall einen Knaben der Familie Meier kennen gelernt hat, womit die Lösung 50% wäre.

Vorsicht mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Vielleicht hilft folgende Geschichte zu sehen, wann eine Aufgabe zur bedingten Wahrscheinlichkeit nicht sinnvoll ist.

Max der Magier bietet ein Spiel an: Er wirft verdeckt zwei Laplace-Würfel. Für einen Einsatz von 1Fr. können Sie raten, was die Summe der Würfel sein wird. Erraten Sie die Summe, erhalten Sie 2Fr.
Sicherlich werden Sie bei diesem Spiel nicht mitmachen, selbst bei bestmöglicher Strategie (Setzen auf die Summe 7), beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit nur 1/6.
Max der Magier schaut sich die zwei Würfel kurz an und erklärt dann: Die Summe ist 7 oder 10. Möchten Sie nun mitspielen?
Sie beschliessen mitzumachen. Wie gehen Sie vor?

a) Sie setzen beliebig auf die 7 oder die 10, denn die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinn beträgt bei 2 Möglichkeiten 50%.
b) Sie setzen auf die 7, denn da nur noch die Fälle (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (4,6), (5,5), (6,4) möglich sind, vermuten Sie, mit 6/9 = 2/3 Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.
c) Sie argwöhnen, dass der Magier Sie bewusst in eine Falle locken will und setzen darum auf die 10.

Die Aufgabe: „Max der Magier würfelt verdeckt mit zwei Würfeln und erklärt: Ich habe die Summe 7 oder 10 geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Würfelsumme 7 geworfen hat?“
ist also völlig unsinnig und kann nicht gelöst werden, wenn wir nicht den Grund kennen, wieso Max gerade diese Zusatzhinweise gibt.
Denkbar wäre z.B. dass Max folgende Strategie hat: Wenn die Summe nicht 7 ist, gibt er als Möglichkeiten 7 und die tatsächliche Summe an, wenn die Summe 7 ist, gibt er jeweils 7 und 8 zur Auswahl. In diesem Fall würden Sie mit Strategie b) bei mehrmaligem Spielen einen grossen Verlust erleiden…

Zum Schluss noch ein Tipp, wie man nicht ins Thema bedingte Wahrscheinlichkeiten einsteigen sollte:
Ein Lehrer würfelt verdeckt mit zwei Würfeln und verrät den Schülern: „Mindestens ein Würfel ist gerade“. Nun stellte er der Klasse die Frage: „Was denkt ihr, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Würfelsumme ungerade ist?“

Die Aufgabe kann ohne zusätzliche Angaben nicht gelöst werden!
Folgende Möglichkeiten sind denkbar:

a) Der Lehrer hat sich fest vorgenommen, den Satz: „Mindestens ein Würfel ist gerade“ zu sagen. Falls der erste Wurf aus zwei ungeraden Zahlen bestanden hätte, hätte der Lehrer den Wurf (falls nötig mehrmals) wiederholt.
b) Der Lehrer hat sich vorgenommen, den Satz: „Mindestens ein Würfel ist……“ völlig zufällig mit dem Wort gerade oder ungerade zu ergänzen, falls ein Würfel gerade und der andere ungerade ist, bei zwei geraden Augenzahlen den Satz mit „gerade“ , bei zwei ungeraden Augenzahlen mit „ungerade“ zu ergänzen.

Bei Strategie a) wäre die Antwort auf die Lehrerfrage 2/3, bei Strategie b) 1/2, der Lehrer erwartet von den Schülern neben mathematischen Kenntnissen also auch noch hellseherische Fähigkeiten…