DPK

Reflexionen an Christbaumkugeln

Martin Lieberherr
Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Meine Frau, die auch Physik unterrichtet, zeigt mir nie ihre Aufgaben. "Immer findsch än Fähler, du Tüpflischiisser!" Diesmal war es bei einer harmlosen Aufgabe zu einem Kugelspiegel: Wo sieht man das Bild, wenn sich der Gegenstand 15 cm vor einem Kugelspiegel mit 10 cm Radius befindet? (Oder so ähnlich, denn eine Millisekunde später hatte sie mir das Blatt aus der Hand gerissen.) Und ich sagte ihr, das könne Sie doch selbst nicht lösen, weil sie nicht geschrieben habe, wo der Beobachter stehe. Und schon war sie eingeschnappt. Und ich hatte das Problem, dass mich die Aufgabe interessierte, dabei hätte ich Prüfungen korrigieren sollen!

Problemstellung

Stellen Sie sich einen Christbaum vor, behangen mit spiegelnden Glaskugeln und besteckt mit brennenden Kerzen. Wo sieht man die Spiegelbilder der Kerzen?

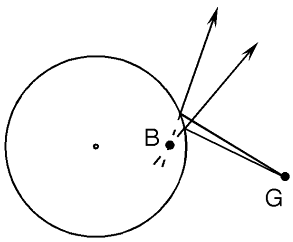

Abbildung 1: Zwei benachbarte Lichtstrahlen gehen von der Kerze (Gegenstand G) aus und werden an der Kugel reflektiert. Die rückwärts verlängerten, benachbart reflektierten Strahlen schneiden sich im virtuellen Bildpunkt B.

Lösung

Um die Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Kerze sehr weit weg sei. Dann treffen die Lichtstrahlen parallel auf die Kugel (Abb. 2).

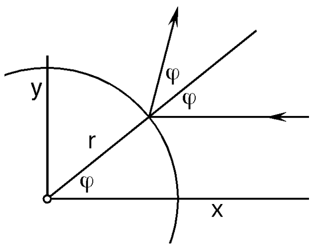

Abbildung 2: Parallel einfallende Strahlen treffen unter dem Winkel φ auf die Kugel mit Radius r. Die Auftreffstelle hat die Koordinaten (r cosφ, r sinφ). Der reflektierte Strahl hat Geradensteigung tan(2φ).

Der reflektierte Strahl (Abb. 2) wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$y = \tan(2\varphi) \cdot (x - r\cos\varphi) + r\sin\varphi$ (G1)

Damit wir das Bild auf diesem Strahl lokalisieren können, benötigen wir einen zweiten Strahl, der vertikal leicht (infinitesimal) versetzt ist:

$$y = \tan(2\varphi + 2d\varphi) \cdot (x - r\cos(\varphi + d\varphi)) + r\sin(\varphi + d\varphi)$$

Mit den Summenformeln der trigonometrischen Funktionen folgt:

$$y = \frac{\tan(2\varphi) + \tan(2d\varphi)}{1 - \tan(2\varphi)\tan(2d\varphi)} \cdot (x - r(\cos\varphi\cos d\varphi - \sin\varphi\sin d\varphi)) + r(\sin\varphi\cos d\varphi + \cos\varphi\sin d\varphi)$$

Mit der Näherung für kleine Winkel erhalten wir:

$$y = \frac{\tan(2\varphi) + 2d\varphi}{1 - \tan(2\varphi) \cdot 2d\varphi} \cdot (x - r(\cos\varphi - \sin\varphi \cdot d\varphi)) + r(\sin\varphi + \cos\varphi \cdot d\varphi)$$

$$y = (\tan(2\varphi) + 2d\varphi) \cdot (1 + \tan(2\varphi) \cdot 2d\varphi) \cdot (x - r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot d\varphi) + r\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot d\varphi$$

Multiplizieren wir aus und behalten nur Terme in erster Ordnung in $d\varphi$, so folgt:

$$y = (\tan(2\varphi) + \tan^2(2\varphi) \cdot 2d\varphi + 2d\varphi) \cdot (x - r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot d\varphi) + r\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$\begin{aligned} y = {} & \tan(2\varphi) \cdot (x - r\cos\varphi) + r\sin\varphi + \\ & + \tan(2\varphi) \cdot r\sin\varphi \cdot d\varphi + (\tan^2(2\varphi) \cdot 2d\varphi + 2d\varphi) \cdot (x - r\cos\varphi) + r\cos\varphi \cdot d\varphi \end{aligned} \quad \text{(G2)}$$

Schneiden wir die zwei Strahlen (G1 und G2), so erhalten wir:

$$0 = \tan(2\varphi) \cdot r\sin\varphi + 2 \cdot (\tan^2(2\varphi) + 1) \cdot (x - r\cos\varphi) + r\cos\varphi$$

$$x = r\cos\varphi - \frac{r}{2} \frac{\tan(2\varphi)\sin\varphi + \cos\varphi}{\tan^2(2\varphi) + 1} \qquad \text{(G3)}$$

Die y-Koordinate erhalten wir, wenn wir (G3) in (G1) einsetzen. Damit können wir den geometrischen Ort der Bildpunkte graphisch darstellen (Abb. 3).

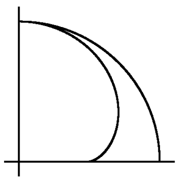

Abbildung 3: Ein Viertel der Christbaumkugel mit der Kurve, auf der die Bildpunkte liegen. Der geometrische Ort aller Bildpunkte ist eine spezielle Epizykloide, eine Nephroide. Die Nephroide ergibt sich als Kaustik, wenn man die Innenseite einer zylindrischen Kaffeetasse mit parallelem Licht bestrahlt. Es sind dieselben Reflexionswinkel wie bei Spiegelung an der Aussenseite.

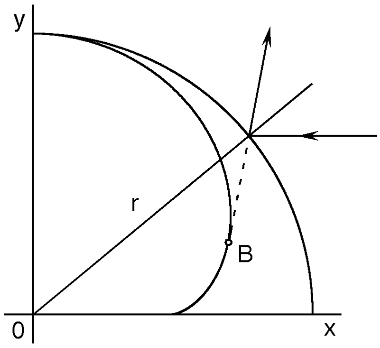

Abbildung 4: Dort, wo der rückwärts verlängerte, reflektierte Strahl die Kurve berührt, befindet sich der Bildpunkt B. Man hätte die Kurve in der Christbaumkugel auch als Hüllkurve aller reflektierten Strahlen berechnen können. Es ist eine Epizykloide mit der Parameterdarstellung

$$\frac{x}{r} = \frac{3}{4}\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos(3\varphi) \quad \text{(äquivalent zu G3)}$$

$$\frac{y}{r} = \frac{3}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin(3\varphi)$$

Wir wollen nun die Rechung etwas verallgemeinern und auch Gegenstände in endlichem Abstand zulassen (Abb. 5)

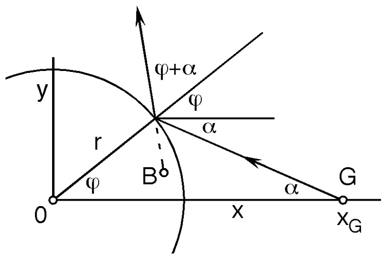

Abbildung 5: Ein Gegenstandspunkt G befinde sich in endlichem Abstand vor der Christbaumkugel. Der Gegenstand habe die Koordinaten (x_G, 0) wobei der Ursprung des Koordinatensystems im Kugelzentrum liegt. Der Bildpunkt B liegt irgendwo auf der Verlängerung des reflektierten Strahls. Dieser Strahl wird durch den Beobachter ausgewählt.

Der reflektierte Strahl (Abb. 5) gehorcht folgender Gleichung:

$$y = \tan(2\varphi + \alpha) \cdot (x - r\cos\varphi) + r\sin\varphi$$

Die gleiche Rechung wie mit (G1) und (G2) habe ich hier numerisch durchgeführt. Man erhält eine Kurvenschar wie in Abb. 6. Der Scharparameter ist die Koordinate x_G des Gegenstands.

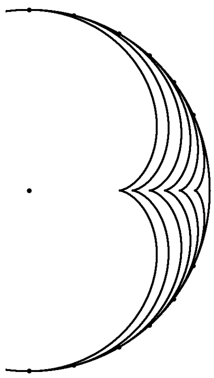

Abbildung 6: Kurven, auf denen die Bildpunkte liegen können, numerisch berechnet für die Gegenstandskoordinaten $x_G = \infty$, $x_G = 4\cdot r$, $x_G = 2\cdot r$, $x_G = 1.5\cdot r$, $x_G = 1.25\cdot r$ und $x_G = 1.1\cdot r$ (Abb. 5).
Die Kurven enden auf der Kugel, die Endpunkte sind etwas fetter markiert. Die Kurven sind keine Nephroiden mehr.
Fragen: Wie kann man die Position des Gegenstands bestimmen resp. wie findet man heraus, welche Kurve zu welcher Gegenstandsposition gehört?
Wie kann man mit Hilfe der Kurvenscharen die Position des Bildes abschätzen?

Bemerkung

Die Spiegelung von Licht an der Christbaumkugel hat nichts mit der mathematischen Kreisspiegelung (Inversion am Kreis) zu tun, weil sich Bild und Gegenstand normalerweise auf verschiedenen Geraden durch den Kugelmittelpunkt befinden. Ist die Bezeichnung wenigstens zutreffend, wenn der Beobachter hinter dem Gegenstand steht (d.h. wenn der Beobachter sich auf der x-Achse befindet)?
Die Inversion am Kreis ist dann definiert durch die Beziehung:

$$x_B x_G = r^2$$

Die Optik liefert einen Bildpunkt bei $x_B = r/2$ (Brennpunkt), falls der Gegenstand sich bei $x_G = \infty$ befindet. Die Inversion am Kreis bildet aber einen unendlich fernen Punkt ins Kreiszentrum ab! Die Kreisspiegelung hat nichts mit der Reflexion von Licht zu tun. (Mindestens nicht so offensichtlich, wie ich es erwarten würde.)