



Leonhard Eulers Differentialkalkül (Teil 1)

Stefan Peer*

September 2007

1 Einleitung

Bereits ein flüchtiger Blick in die Literatur zeigt, dass sich Fachleute jedweder Profession, also sowohl Mathematiker als auch Wissenschaftshistoriker, uneins sind in der Beurteilung von EULERS Leistungen auf dem Gebiet der Differentialrechnung. Zwar sind Meinungsverschiedenheiten, die den Rang, die Interpretation oder die Wirkungsgeschichte wissenschaftlicher Arbeiten betreffen, beileibe nichts aussergewöhnliches. Doch überrascht in diesem Fall das Ausmass des Dissenses. Insbesondere zwei Problembereiche sind von diesem Phänomen betroffen: Die Frage nach der Originalität von EULERS Methoden und Verfahren sowie das Problem der Strenge und Genauigkeit in seinen Begriffsbildungen.

Was den ersten Problembereich betrifft, sehen einige Rezipienten EULERS hauptsächlichliches Verdienst darin, LEIBNIZ' Programm weiterentwickelt und zu einem (vorläufigen) Höhepunkt gebracht zu haben. Dieser Sichtweise schliesst sich unter anderen BOURBAKI mit der Bemerkung an, dass EULER „den Leibnizschen Formalismus zum Äussersten treibt“ und „das Werk von Leibniz“ vollende.¹ Andere billigen EULER weit mehr Eigenständigkeit zu. So sieht BOYER in seinen Werken den *locus classicus* für die einsetzende Algebraisierung der Analysis:

„Most of his predecessors had considered the differential calculus as bound up with geometry, but Euler made the subject a formal theory of functions which had no need to revert to diagrams or geometrical conceptions.“²

„It [the formalistic tendency which his work inaugurated] also made more acceptable the arithmetic interpretation which was later to clarify the calculus through the limit concept which Euler himself neglected.“³

Was die Frage nach der Strenge und Genauigkeit der Begriffsbildungen anbelangt, steht seit EULERS Zeiten vor allem seine Konzeption der infinitesimalen Grössen in der Kritik. So schreibt BELL:

*Der Autor dieses Textes lebt in Zürich und unterrichtet Mathematik an der Kantonsschule Baden. In seiner Freizeit beschäftigt er sich unter anderem mit Philosophie, Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftstheorie.

¹Nicolas Bourbaki, *Elemente der Mathematikgeschichte* (1971), S. 229.

²Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1939/49), S. 243.

³Ebd., S. 246.

„His [EULER’s] differentials are first and last absolute zeros whose ratios by some incomprehensible spiritualism materialize in finite, determinate numbers. As the usually courteous LAGRANGE observed, EULER’s calculus does not make sense.“⁴

Nicht alle Autoren sind mit BELL der Meinung, dass es beim Rechnen mit EULERS Differentialen nicht mit rechten Dingen zugeht. Seine Auffassung der Differentiale als Nullen habe zwar keinen entscheidenden Einfluss auf die weitere Entwicklung der Analysis ausgeübt, meint JUSCHKEWITSCH, doch leide sein Rechnen mit den Nullen „auch nicht an den logischen Gebrechen, die bisweilen in ihm gefunden werden.“⁵

Im Folgenden gebe ich eine knappe Darstellung einiger zentraler Ideen und Methoden des Differentialkalküls, wie sie in EULERS berühmten Lehrbüchern, der *Introductio in analysin infinitorum* (1748) und den *Institutiones calculi differentialis* (1755), enthalten sind. Dabei soll deutlich werden, welche Rolle EULERS Interpretation der Differentiale als absolute Nullen in seinem Kalkül spielt.

2 Introductio in analysin infinitorum

EULERS *Introductio* verfolgt im Wesentlichen den gleichen Zweck wie heutige Lehrbücher, die im angelsächsischen Sprachraum dann oft mit „Precalculus“ überschrieben sind: Dem Leser soll eine gründliche Einführung in die Begriffe und Verfahren gegeben werden, die für das nachfolgende Studium der Differential- und Integralrechnung unentbehrlich sind. Soweit ich die Literatur überblicke, war EULER der erste, der dabei den Begriff der Funktion ins Zentrum stellte, dadurch die bis anhin vorherrschende geometrische Terminologie aus der Analysis verbannte und zu einer weitgehenden Algebraisierung dieser Disziplin beitrug. Im Vorwort zur *Introductio* schreibt er:

„Während also die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrößen und deren Funktionen handelt, nehme ich im ersten Teil hauptsächlich die Funktionen zum Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung und zeige, wie man dieselben umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann.“⁶

Den Funktionsbegriff erbt EULER zweifelsohne von seinem Lehrer JOHANN BERNOULLI. Zwar findet sich die früheste dokumentierte Verwendung der Bezeichnung „Funktion“ in einem mathematischen Kontext bei LEIBNIZ, nämlich in seiner unveröffentlichten Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* (1673). Doch hatte dieser Ausdruck dort noch eine alltagssprachliche, unspezifische Bedeutung im Sinne von „funktionell“, d. h. als Aufgabe oder Wirkungsweise eines Teiles innerhalb eines Ganzen. Erst im Verlauf eines Briefwechsels zwischen LEIBNIZ und BERNOULLI (1694–1698) bekam das Wort „Funktion“ allmählich die Bedeutung einer beliebigen Größe X , die in

⁴Eric T. Bell, *The Development of Mathematics* (1945), S. 288.

⁵Adolf P. Juschkewitsch, „Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis“, in: Kurt Schröder (Hg.), *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (1959), S. 224–244, hier: S. 244.

⁶Leonhard Euler, *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*. Ins Deutsche übertragen von H. Maser (1885).

irgendeiner Weise von einer Veränderlichen x abhängt. Schliesslich präsentierte BERNOULLI 1718 in den Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences die historisch erste, verbürgte Definition:

„On appelle fonction d’une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.“⁷

EULER schliesst sich im ersten Kapitel der *Introductio* der Definition seines Lehrers bis auf eine einzige Abweichung Wort für Wort an; er bestimmt die Funktion nicht als eine Quantität, sondern als einen analytischen Ausdruck (§4). Ausserdem weitet er in §3 den Argumentbereich auf imaginäre Zahlen aus. Den Begriff des analytischen Ausdrucks expliziert EULER in §6, indem er dort die Operationen aufzählt, die bei der Zusammensetzung von Grössen und Konstanten zulässig sind: die Grundrechenoperationen, das Lösen impliziter algebraischer Gleichungen, die elementaren transzendenten Operationen und die Integration. Damit hat der EULERSche Funktionsbegriff im Wesentlichen die gleiche Extension wie der heutzutage gebräuchliche Begriff der bis auf isolierte Singularitäten auf ganz \mathbb{C} analytischen Funktion.

Wie wir sehen werden, beruht EULERS Differentialkalkül darauf, dass sich prinzipiell jede in seinem Sinn verstandene Funktion in einer Potenzreihe entwickeln lässt. Beweisen kann er diese Gesetzmässigkeit nicht, doch versichert er dem Leser der *Introductio*, dass er diese Wahrheit nicht zu bezweifeln brauche. Es ist zweckmässig, an Hand eines konkreten Beispiels einige der Begriffe und Verfahren aufzuzeigen, die EULER bei Reihenentwicklungen anwendet. Meine Wahl fällt dabei auf eine prominente Passage der *Introductio*, nämlich das 7. Kapitel des 1. Bandes, wo EULER die Entwicklung der Logarithmen zur Basis $a > 1$ herleitet und die heute nach ihm benannte Basis e einführt. Zu Beginn (§114) linearisiert EULER die Exponentialfunktion zur Basis a an der Argumentstelle Null in infinitesimaler Weise, um es in der heutigen Sprechweise auszudrücken. Zu diesem Zweck führt er eine infinitesimale Grösse ω ein, in seinen Worten „eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch“. Und „da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt“, gilt

$$a^\omega = 1 + k\omega \quad (1)$$

beziehungsweise

$$\omega = \log(1 + k\omega), \quad (2)$$

„sofern wir a als Basis der Logarithmen nehmen“. Der endliche Wert von k hängt dabei „offenbar von der Grösse von a “ ab. Anschliessend (§115) setzt EULER Gleichung (1) in die i -te Potenz, entwickelt die rechte Seite der Gleichung nach dem binomischen Satz und erhält, „welche Zahl man auch für i setzen möge“:

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}kk\omega\omega + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots \quad (3)$$

„Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i , weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross [...]“. Mittels der

⁷Johann Bernoulli, „Remarques sur ce qu’on a donné jusqu’ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres“, in: *Opera omnia*, vol. II (1742), hier: S. 241.

Substitution von z für $i\omega$ in (3) erhält EULER für jede beliebige Zahl z die Potenzreihe

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}kkzz + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \dots \quad (4)$$

„Da aber i eine unendliche Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt [...]. Aus demselben Grund aber wird $\frac{i-2}{i} = 1$, $\frac{i-3}{i} = 1$ u. s. w.“ (§116). Diese Grenzwertbetrachtung führt EULER ausgehend von (4) zur Potenzreihe für die Exponentialfunktion und, indem er $z = 1$ setzt, auf den logarithmischen Zusammenhang zwischen k und der Basis a :

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{kk}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (5)$$

Um die Logarithmen zu einer Basis a in unendliche Reihen entwickeln zu können, multipliziert EULER die Gleichung (2) mit i , was $i\omega = \log(1+k\omega)^i$ liefert, und merkt an: „[...] wenn man i geradezu unendlich gross annimmt, so wird der Wert der Potenz $(1+k\omega)^i$ jede beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, erreichen können. Setzt man daher $(1+k\omega)^i = 1+x$, so wird $\log(1+x) = i\omega$ [...]“ (§118). Aus $(1+k\omega)^i = 1+x$ folgt

$$i\omega = \frac{i}{k} \left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right)$$

und so erhält EULER

$$\log(1+x) = \frac{i}{k} \left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1 \right). \quad (6)$$

Die binomische Entwicklung von $(1+x)^{\frac{1}{i}}$ ergibt

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}xx + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + \dots, \quad (7)$$

und „weil i eine unendlich grosse Zahl ist“, mithin also „ $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$, $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$ u. s. w.“, folgt aus (6) und (7) die Reihenentwicklung

$$\log(1+x) = \frac{1}{k} \left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \quad (8)$$

(siehe §119). Schliesslich setzt EULER in §122 für k den Wert 1, berechnet mittels (5) die ersten 23 Dezimalen der korrespondierenden Basis, führt für diese den noch heutzutage gebräuchlichen Bezeichner „ e “ ein und erwähnt, dass „die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen [...] natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt [werden], weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann.“

Was sind nun die zentralen Begriffe und Verfahrensweisen, auf die EULER bei der Herleitung von Potenzreihen zurückgreift? Erstens spielt der Begriff der

unendlich kleinen und derjenige der unendlich grossen Zahl eine wichtige Rolle. Entscheidend ist dabei insbesondere, dass sich jede endliche Zahl als das Produkt einer unendlich kleinen mit einer geeigneten, unendlich grossen Zahl auffassen lässt, und dass für jede unendlich grosse Zahl i stets $\frac{i-n}{i} = 1$ ist, sofern n einen endlichen Wert hat. Bemerkenswert ist, dass EULER keine einheitliche Terminologie durchhält: An gewissen Stellen ist anscheinend von aktual-unendlichen Zahlen die Rede, in anderen Passagen wird hingegen das Unendliche mittels eines Grenzprozesses als eine potentielle Entität aufgefasst. Wer nun hofft, in der *Introductio* eine nähere Begriffsbestimmung zu finden – sei es in Form einer Erläuterung oder gar einer Definition – oder auf ein Postulat zu stossen, das die Regeln für das Rechnen mit unendlichen Zahlen festlegt, wird enttäuscht. EULER weist im Vorwort bloss kurz und bündig darauf hin, dass er in der *Introductio* viele Fragen erledigt habe, „durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich, und ohne es selbst zu merken, vertraut wird.“ Zweitens setzt EULER geschickt das Verfahren der infinitesimalen Linearisierung ein. Ein Manuskript mit dem Titel *Johannis Bernoullii lectiones de calculo differentia- lium* (1691/92), das der Basler Mathematiker für seinen Schüler MARQUIS DE L'HÔPITAL verfasste, beginnt mit drei Postulaten, wobei hier nur das zweite von Interesse ist. Es besagt, dass jede krumme Linie aus unendlich vielen Geraden bestehe, die selbst unendlich klein seien. Diese Postulate und ihre Anwendungen wurden schliesslich einem breiten, mathematisch gebildeten Publikum durch das erste publizierte Lehrbuch zur Differentialrechnung bekannt, nämlich DE L'HÔPITALS *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes cour- bes*, das 1696 veröffentlicht wurde. Offensichtlich bildet das zweite Postulat die Grundlage für infinitesimale Linearisierungen. Dies wird deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die endliche Zahl k in (1) nur von a , nicht jedoch von ω abhängt; Beziehung (1) gilt somit für jede unendlich kleine Zahl ω . Drittens verwendet EULER die Verallgemeinerung des binomischen Satzes auf beliebige reelle Exponenten, die auf NEWTON zurückgeht. NEWTONS 1669 vollendete, aber erst 1711 gedruckte Abhandlung *De analysi per aequationes numero termi- norum infinitas* ist das eigentliche Gründungsdokument für die Untersuchung unendlicher Reihen, wobei sich die dazu gehörenden Konvergenztheorien erst im 19. Jahrhundert ausbildeten. Auch EULER ist sich nicht bewusst, dass – in unserer Terminologie – der Konvergenzradius in (7) den Wert 1 hat, sieht man einmal von der Schwierigkeit ab, dass der auftretende Exponent $\frac{1}{i}$ unendlich klein ist. Dies zeigt sich auf Grund seiner Ausführungen in §120 der *Introductio*. Vereinfacht dargestellt, versucht er dort unter Anwendung der Reihe (8) den natürlichen Logarithmus von 10 näherungsweise zu berechnen und räumt ein, dass schwer einzusehen sei, wie

$$\log 10 = \frac{9}{1} - \frac{9 \cdot 9}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \dots$$

„sein könne, da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und miteinander vereinigt.“

Der zweite, abschliessende Teil dieser Arbeit erscheint in der nächsten Ausgabe.