Leonhard Eulers Differentialkalkül *

Stefan Peer†

Dezember 2007

1 Einleitung

Bereits ein flüchtiger Blick in die Literatur zeigt, dass sich Fachleute jedweder Profession, also sowohl Mathematiker als auch Wissenschaftshistoriker, uneins sind in der Beurteilung von EULERs Leistungen auf dem Gebiet der Differentialrechnung. Zwar sind Meinungsverschiedenheiten, die den Rang, die Interpretation oder die Wirkungsgeschichte wissenschaftlicher Arbeiten betreffen, beileibe nichts aussergewöhnliches. Doch überrascht in diesem Fall das Ausmass des Dissenses. Insbesondere zwei Problembereiche sind von diesem Phänomen betroffen: Die Frage nach der Originalität von EULERs Methoden und Verfahren sowie das Problem der Strenge und Genauigkeit in seinen Begriffsbildungen.

Was den ersten Problembereich betrifft, sehen einige Rezipienten EULERs hauptsächliches Verdienst darin, LEIBNIZ' Programm weiterentwickelt und zu einem (vorläufigen) Höhepunkt gebracht zu haben. Dieser Sichtweise schliesst sich unter anderen BOURBAKI mit der Bemerkung an, dass EULER „den Leibnizschen Formalismus zum Äußersten treibt" und „das Werk von Leibniz" vollende.[1] Andere billigen EULER weit mehr Eigenständigkeit zu. So sieht BOYER in seinen Werken den *locus classicus* für die einsetzende Algebraisierung der Analysis:

> „Most of his predecessors had considered the differential calculus as bound up with geometry, but Euler made the subject a formal theory of functions which had no need to revert to diagrams or geometrical conceptions."[2]
>
> „It [the formalistic tendency which his work inaugurated] also made more acceptable the arithmetic interpretation which was later to clarify the calculus through the limit concept which Euler himself neglected."[3]

* *Anmerkung des Herausgebers:* Der erste Teil dieses Artikels erschien bereits im Bulletin 105. Wegen der besseren Lesbarkeit haben wir beschlossen diesen ersten Teil nochmals zu publizieren – zusammen mit Teil 2.

† Der Autor dieses Textes lebt in Zürich und unterrichtet Mathematik an der Kantonsschule Baden. In seiner Freizeit beschäftigt er sich unter anderem mit Philosophie, Wissenschaftsgeschichte und Wissenschaftstheorie.

[1] Nicolas Bourbaki, *Elemente der Mathematikgeschichte* (1971), S. 229.

[2] Carl B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1939/49), S. 243.

[3] Ebd., S. 246.

Was die Frage nach der Strenge und Genauigkeit der Begriffsbildungen anbelangt, steht seit Eulers Zeiten vor allem seine Konzeption der infinitesimalen Grössen in der Kritik. So schreibt Bell:

> „His [Euler's] differentials are first and last absolute zeros whose ratios by some incomprehensible spiritualism materialize in finite, determinate numbers. As the usually courteous Lagrange observed, Euler's calculus does not make sense.“[4]

Nicht alle Autoren sind mit Bell der Meinung, dass es beim Rechnen mit Eulers Differentialen nicht mit rechten Dingen zugeht. Seine Auffassung der Differentiale als Nullen habe zwar keinen entscheidenden Einfluss auf die weitere Entwicklung der Analysis ausgeübt, meint Juschkewitsch, doch leide sein Rechnen mit den Nullen „auch nicht an den logischen Gebrechen, die bisweilen in ihm gefunden werden.“[5]

Im Folgenden gebe ich eine knappe Darstellung einiger zentraler Ideen und Methoden des Differentialkalküls, wie sie in Eulers berühmten Lehrbüchern, der *Introductio in analysin infinitorum* (1748) und den *Institutiones calculi differentialis* (1755), enthalten sind. Dabei soll deutlich werden, welche Rolle Eulers Interpretation der Differentiale als absolute Nullen in seinem Kalkül spielt.

2 Introductio in analysin infinitorum

Eulers *Introductio* verfolgt im Wesentlichen den gleichen Zweck wie heutige Lehrbücher, die im angelsächsischen Sprachraum dann oft mit „Precalculus“ überschrieben sind: Dem Leser soll eine gründliche Einführung in die Begriffe und Verfahren gegeben werden, die für das nachfolgende Studium der Differential- und Integralrechnung unentbehrlich sind. Soweit ich die Literatur überblicke, war Euler der erste, der dabei den Begriff der Funktion ins Zentrum stellte, dadurch die bis anhin vorherrschende geometrische Terminologie aus der Analysis verbannte und zu einer weitgehenden Algebraisierung dieser Disziplin beitrug. Im Vorwort zur *Introductio* schreibt er:

> „Während also die gesamte Analysis des Unendlichen von den veränderlichen Zahlgrössen und deren Funktionen handelt, nehme ich im ersten Teil hauptsächlich die Funktionen zum Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung und zeige, wie man dieselben umformen, zerlegen und in unendliche Reihen entwickeln kann.“[6]

Den Funktionsbegriff erbte Euler zweifelsohne von seinem Lehrer Johann Bernoulli. Zwar findet sich die früheste dokumentierte Verwendung der Bezeichnung „Funktion“ in einem mathematischen Kontext bei Leibniz, nämlich in seiner unveröffentlichten Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* (1673). Doch hatte dieser Ausdruck dort noch eine alltagssprachliche, unspezifische Bedeutung im Sinne von „funktionell“, d. h. als Aufgabe

[4] Eric T. Bell, *The Development of Mathematics* (1945), S. 288.

[5] Adolf P. Juschkewitsch, „Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis“, in: Kurt Schröder (Hg.), *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (1959), S. 224–244, hier: S. 244.

[6] Leonhard Euler, *Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* Ins Deutsche übertragen von H. Maser (1885).

oder Wirkungsweise eines Teiles innerhalb eines Ganzen. Erst im Verlauf eines Briefwechsels zwischen LEIBNIZ und BERNOULLI (1694–1698) bekam das Wort „Funktion" allmählich die Bedeutung einer beliebigen Grösse X, die in irgendeiner Weise von einer Veränderlichen x abhängt. Schliesslich präsentierte BERNOULLI 1718 in den Abhandlungen der Pariser Académie des Sciences die historisch erste, verbürgte Definition:

> „On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes."[7]

EULER schliesst sich im ersten Kapitel der *Introductio* der Definition seines Lehrers bis auf eine einzige Abweichung Wort für Wort an; er bestimmt die Funktion nicht als eine Quantität, sondern als einen analytischen Ausdruck (§4). Ausserdem weitet er in §3 den Argumentbereich auf imaginäre Zahlen aus. Den Begriff des analytischen Ausdrucks expliziert EULER in §6, indem er dort die Operationen aufzählt, die bei der Zusammensetzung von Grössen und Konstanten zulässig sind: die Grundrechenoperationen, das Lösen impliziter algebraischer Gleichungen, die elementaren transzendenten Operationen und die Integration. Damit hat der EULERsche Funktionsbegriff im Wesentlichen die gleiche Extension wie der heutzutage gebräuchliche Begriff der bis auf isolierte Singularitäten auf ganz $\mathbb{C}$ analytischen Funktion.

Wie wir sehen werden, beruht EULERs Differentialkalkül darauf, dass sich prinzipiell jede in seinem Sinn verstandene Funktion in einer Potenzreihe entwickeln lässt. Beweisen kann er diese Gesetzmässigkeit nicht, doch versichert er dem Leser der *Introductio*, dass er diese Wahrheit nicht zu bezweifeln brauche. Es ist zweckmässig, an Hand eines konkreten Beispiels einige der Begriffe und Verfahren aufzuzeigen, die EULER bei Reihenentwicklungen anwendet. Meine Wahl fällt dabei auf eine prominente Passage der *Introductio*, nämlich das 7. Kapitel des 1. Bandes, wo EULER die Entwicklung der Logarithmen zur Basis $a > 1$ herleitet und die heute nach ihm benannte Basis e einführt. Zu Beginn (§114) linearisiert EULER die Exponentialfunktion zur Basis a an der Argumentstelle Null in infinitesimaler Weise, um es in der heutigen Sprechweise auszudrücken. Zu diesem Zweck führt er eine infinitesimale Grösse ω ein, in seinen Worten „eine unendlich kleine Zahl oder ein beliebig kleiner, jedoch von 0 verschiedener Bruch". Und „da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt", gilt

$$a^{\omega} = 1 + k\omega \tag{1}$$

beziehungsweise

$$\omega = \log(1 + k\omega), \tag{2}$$

„sofern wir a als Basis der Logarithmen nehmen". Der endliche Wert von k hängt dabei „offenbar von der Grösse von a" ab. Anschliessend (§115) setzt EULER Gleichung (1) in die i-te Potenz, entwickelt die rechte Seite der Gleichung nach dem binomischen Satz und erhält, „welche Zahl man auch für i setzen möge":

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}kk\omega\omega + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots \tag{3}$$

[7] Johann Bernoulli, „Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres", in: *Opera omnia*, vol. II (1742), hier: S. 241.

„Setzt man nun $i = \frac{z}{\omega}$, wobei z irgend eine endliche Zahl bedeuten soll, so wird i, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, unendlich gross [...]“. Mittels der Substitution von z für $i\omega$ in (3) erhält Euler für jede beliebige Zahl z die Potenzreihe

$$\begin{aligned} a^z &= 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}kkzz + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 \\ &\quad + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

„Da aber i eine unendliche Zahl ist, so wird $\frac{i-1}{i} = 1$; denn offenbar nähert sich der Wert des Bruches $\frac{i-1}{i}$ immer mehr der Einheit, je grösser die Zahl ist, die man für i setzt [...]. Aus demselben Grund aber wird $\frac{i-2}{i} = 1$, $\frac{i-3}{i} = 1$ u. s. w.“ (§116). Diese Grenzwertbetrachtung führt Euler ausgehend von (4) zur Potenzreihe für die Exponentialfunktion und, indem er $z = 1$ setzt, auf den logarithmischen Zusammenhang zwischen k und der Basis a:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{kk}{1 \cdot 2} + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \tag{5}$$

Um die Logarithmen zu einer Basis a in unendliche Reihen entwickeln zu können, multipliziert Euler die Gleichung (2) mit i, was $i\omega = \log(1 + k\omega)^i$ liefert, und merkt an: „[...] wenn man i geradezu unendlich gross annimmt, so wird der Wert der Potenz $(1 + k\omega)^i$ jede beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, erreichen können. Setzt man daher $(1+k\omega)^i = 1+x$, so wird $\log(1+x) = i\omega$ [...]“ (§118). Aus $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ folgt

$$i\omega = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right)$$

und so erhält Euler

$$\log(1+x) = \frac{i}{k}\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right). \tag{6}$$

Die binomische Entwicklung von $(1 + x)^{\frac{1}{i}}$ ergibt

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{i}} &= 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i \cdot 2i}xx + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i}x^3 \\ &\quad - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}x^4 + \cdots, \end{aligned} \tag{7}$$

und „weil i eine unendlich grosse Zahl ist“, mithin also „$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$, $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$, $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$ u. s. w.“, folgt aus (6) und (7) die Reihenentwicklung

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right) \tag{8}$$

(siehe §119). Schliesslich setzt Euler in §122 für k den Wert 1, berechnet mittels (5) die ersten 23 Dezimalen der korrespondierenden Basis, führt für diese den noch heutzutage gebräuchlichen Bezeichner „e“ ein und erwähnt, dass „die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen [...] natürliche oder hyperbolische Logarithmen genannt [werden], weil die Quadratur der Hyperbel durch solche Logarithmen ausgeführt werden kann.“

Was sind nun die zentralen Begriffe und Verfahrensweisen, auf die EULER bei der Herleitung von Potenzreihen zurückgreift? Erstens spielt der Begriff der unendlich kleinen und derjenige der unendlich grossen Zahl eine wichtige Rolle. Entscheidend ist dabei insbesondere, dass sich jede endliche Zahl als das Produkt einer unendlich kleinen mit einer geeigneten, unendlich grossen Zahl auffassen lässt, und dass für jede unendlich grosse Zahl i stets $\frac{i-n}{i} = 1$ ist, sofern n einen endlichen Wert hat. Bemerkenswert ist, dass EULER keine einheitliche Terminologie durchhält: An gewissen Stellen ist anscheinend von aktual-unendlichen Zahlen die Rede, in anderen Passagen wird hingegen das Unendliche mittels eines Grenzprozesses als eine potentielle Entität aufgefasst. Wer nun hofft, in der *Introductio* eine nähere Begriffsbestimmung zu finden – sei es in Form einer Erläuterung oder gar einer Definition – oder auf ein Postulat zu stossen, das die Regeln für das Rechnen mit unendlichen Zahlen festlegt, wird enttäuscht. EULER weist im Vorwort bloss kurz und bündig darauf hin, dass er in der *Introductio* viele Fragen erledigt habe, „durch welche der Leser mit dem Begriff des Unendlichen allmählich, und ohne es selbst zu merken, vertraut wird.“ Zweitens setzt EULER geschickt das Verfahren der infinitesimalen Linearisierung ein. Ein Manuskript mit dem Titel *Johannis Bernoullii lectiones de calculo differentialium* (1691/92), das der Basler Mathematiker für seinen Schüler MARQUIS DE L'HÔPITAL verfasste, beginnt mit drei Postulaten, wobei hier nur das zweite von Interesse ist. Es besagt, dass jede krumme Linie aus unendlich vielen Geraden bestehe, die selbst unendlich klein seien. Diese Postulate und ihre Anwendungen wurden schliesslich einem breiten, mathematisch gebildeten Publikum durch das erste publizierte Lehrbuch zur Differentialrechnung bekannt, nämlich DE L'HÔPITALS *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, das 1696 veröffentlicht wurde. Offensichtlich bildet das zweite Postulat die Grundlage für infinitesimale Linearisierungen. Dies wird deutlich, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die endliche Zahl k in (1) nur von a, nicht jedoch von ω abhängt; Beziehung (1) gilt somit für jede unendlich kleine Zahl ω. Drittens verwendet EULER die Verallgemeinerung des binomischen Satzes auf beliebige reelle Exponenten, die auf NEWTON zurückgeht. NEWTONS 1669 vollendete, aber erst 1711 gedruckte Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* ist das eigentliche Gründungsdokument für die Untersuchung unendlicher Reihen, wobei sich die dazu gehörenden Konvergenztheorien erst im 19. Jahrhundert ausbildeten. Auch EULER ist sich nicht bewusst, dass – in unserer Terminologie – der Konvergenzradius in (7) den Wert 1 hat, sieht man einmal von der Schwierigkeit ab, dass der auftretende Exponent $\frac{1}{i}$ unendlich klein ist. Dies zeigt sich auf Grund seiner Ausführungen in §120 der *Introductio*. Vereinfacht dargestellt, versucht er dort unter Anwendung der Reihe (8) den natürlichen Logarithmus von 10 näherungsweise zu berechnen und räumt ein, dass schwer einzusehen sei, wie

$$\log 10 = \frac{9}{1} - \frac{9 \cdot 9}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \cdots$$

„sein könne, da doch die Glieder dieser Reihe fortwährend grösser werden, und man daher die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, dass man nur einige Glieder davon berechnet und miteinander vereinigt.“

3 Ein Dilemma

Die Infinitesimalrechnung erfuhr im 18. Jahrhundert eine stürmische Entwicklung, die eine grosse Vielfalt an beeindruckenden Anwendungen hervorbrachte. Trotz dieser Erfolge wurden die grundlegenden Begriffe und Verfahren, derer sich die damaligen Mathematiker bedienten, von Anfang an beanstandet. Einer der einflussreichsten Kritiker war der irische Philosoph George Berkeley. In seiner Streitschrift *The Analyst*[8] von 1734 macht er geltend, dass weder Newtons Fluxionenrechnung noch Leibniz' Differentialkalkül den damals in den Wissenschaften üblichen Anforderungen an die Genauigkeit und Strenge genügten. Was den Differentialkalkül betrifft, so richtet sich Berkeleys Kritik gegen zwei grundlegende Postulate. Das erste läuft darauf hinaus, dass infinitesimale Summanden höherer Ordnung gegenüber solchen tieferer Ordnung vernachlässigt werden dürfen; das zweite besagt, dass jede krumme Linie als Polygonzug, der sich aus unendlich vielen infinitesimalen Strecken zusammensetzt, aufgefasst werden kann.[9] In scharfsinniger Weise illustriert Berkeley seine Einwände an Hand des Problems, die Subtangente der Parabel $y^2 = px$ zu bestimmen. In Ab-

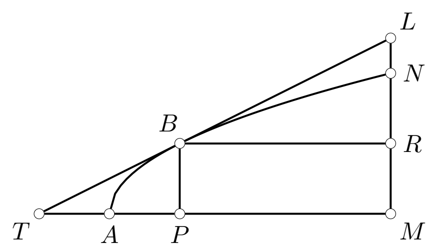

Abbildung 1: Subtangente PT an die Parabel ABN

bildung 1 sei ABN der Parabelbogen mit der Gleichung $y^2 = px$, $AP = x$ die Abszisse, $PB = y$ die Ordinate. $PM = \mathrm{d}x$ und $RN = \mathrm{d}y$ seien die zugehörigen infinitesimalen Differenzen. Die gesuchte Subtangente ist die Orthogonalprojektion PT des Tangentenabschnitts BT auf die Abszisse. Unter Annahme des zweiten Postulats des Differentialkalküls folgt, dass das infinitesimale Kurveninkrement BN mit der Tangentenstrecke BL zusammenfällt. Somit sind das differentielle Dreieck BRN und das Dreieck TPB ähnlich, folglich erhält man für die Subtangente PT den Wert $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. Berkeley wendet dagegen ein:

> „[...] in reality it is not the Triangle RNB but RLB, which is similar to PBT, and therefore (instead of RN) RL should have been the first term of the Proportion, *i. e.* $RN + NL$, *i. e.* $\mathrm{d}y + z$: whence the true expression for the Subtangent should have been $\frac{y\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y+z}$."[10]

[8] Wieder abgedruckt in: George Berkeley, „*De Motu* and *The Analyst*". Edited and translated by Douglas M. Joseph. In: *The New Synthese Historical Library*, Vol. 41 (1992).

[9] Siehe Marquis de l'Hôpital, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696). Vgl. auch oben, S. 5.

[10] George Berkeley, *The Analyst; Or, a Discourse addressed to an Infidel Mathematician. Wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than religious Mysteries and Points of Faith.* (1734), §21.

Substituiert man in $y^2 = px$ den Ausdruck $y + \mathrm{d}y$ für y respektive $x + \mathrm{d}x$ für x, so erhält man mit Hilfe des ersten Postulats die Differentialgleichung $\mathrm{d}y = \frac{p\mathrm{d}x}{2y}$. Auch diese Kalkulation hält BERKELEYs Kritik nicht stand, denn

> „[...] if you multiply $y + \mathrm{d}y$ by it self, and retain the whole Product without rejecting the Square of the Difference, it will then come out, by substituting the augmented Quantities in the Equation of the Curve, that $\mathrm{d}y = \frac{p\mathrm{d}x}{2y} - \frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}y}{2y}$ truly."[11]

Während die Regeln des Differentialkalküls für die Subtangente PT den Wert $\frac{2y^2}{p}$ liefern, führen BERKELEYs Überlegungen auf $PT = \frac{2y^2\mathrm{d}x}{p\mathrm{d}x - \mathrm{d}y^2 + 2yz}$. Die Pointe in BERKELEYs Argumentation besteht in dem Nachweis, dass gemäss APOLLONIUS' Kegelschnitttheorie $z = \frac{\mathrm{d}y^2}{2y}$ ist (siehe §22), sich also die angeblichen Fehler, die sich bei der Berechnung von PT und $\mathrm{d}y$ mittels der beiden Postulate einstellen, gegenseitig aufheben. BERKELEY bezweifelt keinesfalls die Theoreme und Ergebnisse des Differentialkalküls seiner Zeit, sondern beharrt darauf, dass diese aus falschen Prämissen abgeleitet seien, wobei die Wahrheit der jeweiligen Konklusion auf einer Fehlerkompensation beruhe.

Der *Analyst* führte zu erbitterten Kontroversen, in die auch EULER verwickelt wurde. So veröffentlichte der englische Mathematiker BENJAMIN ROBINS 1739 einen Aufsatz mit dem Titel *Remarks on Mr. Euler's Treatise of Motion, Dr. Smith's compleat System of Opticks, and Dr. Jurin's Essay upon Distinct and Indistinct Vision.* Darin wirft er EULER eine fehlerhafte Vernachlässigung infinitesimaler Grössen vor und unterstellt, dass diese „[is] so strong an attachment to the principles, he had imbibed under that inelegant computist, who was his instructor, that he was afraid to trust his own understanding [...]". EULER kannte zweifelsohne ROBBINS' Vorwürfe, war doch die soeben zitierte Passage Gegenstand eines Briefes[12], den der empörte JOHANN BERNOULLI seinem ehemaligen Schüler nach Berlin sandte, nachdem dieser eine Arbeit von ROBINS über Ballistik ins Deutsche übertragen und 1745 veröffentlicht hatte. Dass EULER mit BERKELEYs kritischen Einwänden vertraut war, ist ebenfalls evident. Ohne den irischen Philosophen beim Namen zu nennen, schrieb EULER im Vorwort der *Institutiones calculi differentialis*(1755):

> „[...] it has seemed that there is a distinction between absolutely nothing and a special order of quantities infinitely small, which do not quite vanish completely but retain a certain quantity that is indeed less than any assignable quantity. Concerning these, it is correctly objected that geometric rigor has been neglected. [...] if these infinitely small quantities, which are neglected in calculus, are not quite nothing, then necessarily an error must result, that will be the greater the more these quantities are heaped up. If it should happen, that the error is less, this must be attributed to a fault in the calculation whereby certain errors are compensated by other errors, rather than freeing the calculation from suspicion of error."[13]

Die durch BERKELEYs *Analyst* hervorgerufenen Auseinandersetzungen haben sicher dazu beigetragen, dass EULER in den *Institutiones calculi differentialis*

[11] Ebd., §21.
[12] Leonhard Euler, *Opera omnia*, ser. IVA, vol. 1 (1975), R 226.
[13] Leonhard Euler, *Foundations of Differential Calculus.* Translated by John D. Blanton (2000), S. viii.

den Versuch unternahm, die Differentiale neu zu interpretieren. Dabei sah er sich, wie alle Proponenten des Differentialkalküls, einem Dilemma gegenüber: Falls man die Differentiale als unendlich kleine, aber von Null verschiedene Differenzen betrachtet, dann ist man BERKELEYs Kritik ausgesetzt. Stellt man sich dagegen auf den Standpunkt, dass alle Differentiale den Wert Null haben, so wird man mit dem schon von LEIBNIZ erhobenen Einwand konfrontiert, dass dann alle Differentialquotienten den Wert $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0}{0} = 1$ haben müssten, da alle Nullen gleich gross seien.

4 Institutiones calculi differentialis

EULER richtet sich in den *Institutiones calculi differentialis* gegen das zweite Horn des Dilemmas und führt aus, dass wenigstens in gewissen Fällen die Division von Null durch Null sinnvoll erklärt werden könne. Zu diesem Zweck führt er die Unterscheidung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Verhältnis zweier Nullen ein. Während das arithmetische Verhältnis, das heisst die Differenz zweier Nullen stets Null sei, könne das geometrische Verhältnis, das ist der Quotient, eine von Eins verschiedene Zahl sein:

> „Everyone knows that when zero is multiplied by any number, the product is zero and that $n \cdot 0 = 0$, so that $n : 1 = 0 : 0$. Hence, it is clear that any two zeros can be in a geometric ratio, although from the perspective of arithmetic, the ratio is always of equals.“[14]

EULER legt zunächst am Beispiel der Proportion $y = ax$ dar, dass der Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, aufgefasst als geometrisches Verhältnis zweier Nullen, einen eindeutig bestimmbaren Wert hat:

> „[...] $\mathrm{d}x$ indicates a quantity that is infinitely small, so that both $\mathrm{d}x = 0$ and $a\mathrm{d}x = 0$, where a is any finite quantity. Despite this, the geometric ratio $a\mathrm{d}x : \mathrm{d}x$ is finite, namely $a : 1$. For this reason, these two infinitely small quantities $\mathrm{d}x$ and $a\mathrm{d}x$, both being equal to 0, cannot be confused when we consider their ratio.“[15]

Anschliessend weist er darauf hin, „that the infinitely small vanishes in comparison with the finite and hence can be neglected“ (§87). Denn aus $n\mathrm{d}x = 0$ folge einerseits $a \pm n\mathrm{d}x - a = 0$ und andererseits sei offensichtlich, dass $\frac{a \pm n\mathrm{d}x}{a} = 1$. Das Prinzip, wonach infinitesimale Grössen höherer Ordnung gegenüber solchen tieferer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, ist bei EULER folgerichtig kein Postulat mehr, sondern ein begründungspflichtiger Hilfssatz. Für den Spezialfall der Differentiale $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}x^2$ argumentiert EULER wie folgt:

> „The ratio of $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}x\mathrm{d}x$ to $\mathrm{d}x$ is that of equals, whether the comparison is arithmetic or geometric. There is no doubt about the arithmetic; in the geometric comparison, $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}x\mathrm{d}x : \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}x\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1 \pm \mathrm{d}x = 1$.“[16]

[14] Ebd., §85.
[15] Ebd., §86.
[16] Ebd., §88.

EULERs Formulierungen über die Differentiale als Nullen hinterlassen beim heutigen Leser zweifelsohne einen merkwürdigen Eindruck. Geht es jedoch jenseits polemischer Einlassungen um eine angemessene Würdigung seiner Interpretation der Differentiale, so sollte man sich hüten, auf Grund einer oberflächlichen Kritik der Terminologie ein Urteil zu fällen. Von entscheidender Bedeutung für die Bewertung von EULERs Beitrag ist vielmehr die Frage, ob seine Interpretation zu sinnvollen Handlungsanleitungen für das Rechnen mit Differentialen führt. Mit anderen Worten: Relevant ist, was EULER *tut*. Seine Interpretation der Differentiale als Nullen läuft letztlich auf die Praxis hinaus, einen Differentialquotienten – unter anderem durch Kürzen mit $\mathrm{d}x$ – so umzuformen, dass ihm ein sinnvoller Wert zugeordnet werden kann, wenn $\mathrm{d}x = 0$ und folglich $\mathrm{d}y = 0$ ist. Diese Praxis ergibt im Kontext von EULERs Funktionsbegriff auch vor dem Hintergrund der heutigen Mathematik einen Sinn. Wie im zweiten Abschnitt des vorliegenden Aufsatzes dargelegt wird, benennt EULER mit dem Ausdruck *Funktion* ungefähr dasselbe, was man in heutiger Terminologie unter einer bis auf isolierte Singularitäten analytischen Funktion versteht. Ist nun $y = f(x)$ die Gleichung einer solchen Funktion, die in einer Umgebung von x_o analytisch ist, so ist der dazugehörige Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

an der Stelle $x = x_o$ hebbar. EULER bestimmt den Differentialquotienten an der Stelle x_o nicht, indem er – wie es heutzutage üblich wäre – die Singularität des Differenzenquotienten mittels des Grenzübergangs $x \to x_o$ hebt, sondern indem er den Differenzenquotienten mit Hilfe geeigneter Termumformungen transformiert und anschliessend an der Stelle $x = x_o$ auswertet. Beide Methoden führen natürlich zu den gleichen Ergebnissen.

EULER verallgemeinert dieses Verfahren zu einem universellen Ableitungsalgorithmus. Dieser beruht darauf, dass sich prinzipiell jede in seinem Sinn verstandene Funktion in einer Potenzreihe entwickeln lässt. Bezeichnet nämlich $\omega = \Delta x$ ein beliebiges Inkrement und y^{I} den Wert einer gegebenen Funktion y an der Stelle $x+\omega$, so lässt sich $\Delta y = y^{\mathrm{I}} - y$ gemäss EULER in einer Potenzreihe der Form

$$P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + S\omega^4 + \ldots \tag{9}$$

entwickeln, wobei die Koeffizienten P, Q, R, S, … Funktionen in x sind.[17] Ersetzt man in (9) das endliche Inkrement ω durch das Differential $\mathrm{d}x$ und entsprechend Δy durch $\mathrm{d}y$, so erhält man für den Differentialquotienten den Koeffizienten P.[18] Die methodologische Pointe besteht modern ausgedrückt darin, dass die erste Ableitung als Koeffizient des in ω linearen Gliedes berechnet wird. Zu diesem Zweck dehnt EULER ohne weitere Erörterung den Begriff des geometrischen Verhältnisses zweier Nullen auf die Fälle aus, bei denen der Zähler eine unendliche Reihe ist[19] – eine Verallgemeinerung, die natürlich keinesfalls selbstverständlich ist.

Zum Schluss werde ich EULERs Verfahren an Hand einer konkreten transzendenten Funktion, nämlich des natürlichen Logarithmus, illustrieren. Mit Hilfe

[17] Ebd., §20 ff.
[18] Vgl. ebd., §120 f.
[19] Ebd., §113.

der Logarithmengesetze findet Euler für die Differenz Δy den Ausdruck

$$y^{\mathrm{I}} - y = \log(x+\omega) - \log x = \log\left(1 + \frac{\omega}{x}\right),$$

was sofort

$$\mathrm{d}y = \log\left(1 + \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) \tag{10}$$

liefert. Anschliessend setzt er in der Reihenentwicklung (8) für k den Wert 1, um den Logarithmus zur natürlichen Basis e zu erhalten.[20] Die Substitution von $\frac{\mathrm{d}x}{x}$ für x in (8) führt ihn vermöge von (10) auf

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}x}{2xx} + \frac{\mathrm{d}x^3}{3x^3} - \ldots,$$

woraus Euler mit den Worten schliesst:

> „Since all of the terms of this series vanish in the presence of the first term, we have $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$."[21]

5 Zusammenfassung

Eulers Versuch, die Differentiale als absolute Nullen neu zu interpretieren, ist eine Reaktion auf die Einwände einiger seiner Zeitgenossen gegen die damaligen Grundlagen des Differentialkalküls. Im Kontext seines Funktionsbegriffs führt er zusammen mit der Reihenentwicklung auf ein originelles allgemeines Ableitungsverfahren. Wohl greift Euler bei der Reihenentwicklung von Funktionen auf Vorstellungen über Grenzwertprozesse zurück, sein Begriff des Differentials beziehungsweise Differentialquotienten ist jedoch frei von solchen Konnotationen. Stattdessen interpretiert Euler den Differentialquotienten als einen analytischen Ausdruck in $\mathrm{d}x$, der durch geeignete algebraische Umformungen so hergerichtet werden soll, dass er an der Stelle $\mathrm{d}x = 0$ sinnvoll ausgewertet werden kann. Diesem Konzept wird man kaum vorwerfen können, es setze einen obskuren Spiritualismus voraus.[22] Im Gegenteil, dank seines vergleichsweise engen Funktionsbegriffs führen Eulers Ansichten über die Differentiale zu einfachen, unmissverständlichen Handlungsanleitungen, die sich auch vor dem Hintergrund der heutzutage üblichen, mathematischen Praxis rechtfertigen lassen. Dass sich sein Verfahren auf den gegenwärtig gebräuchlichen, allgemeinen Funktionsbegriff nicht anwenden lässt, wird man ihm nicht anlasten können. Es war seinerzeit für eine andere Konzeption von Differentialrechnung gedacht – begriffliche Konstrukte sollten im Rückblick wohl danach beurteilt werden, ob sie sich im damaligen Kontext und Begriffsrahmen bewährten.

[20] Siehe oben, zweiter Abschnitt, S. 4.

[21] Vgl. Leonhard Euler, *Foundations of Differential Calculus.* Translated by John D. Blanton (2000), §180.

[22] Vgl. Eric T. Bells Zitat auf S. 2.