



Computersimulation eines Teslatransformators

Stephan Scheidegger

Einleitung

Der Tesla-Transformator dient der Erzeugung hoher Spannungen (100 kV bis einige MV) oder Ströme im Hochfrequenzbereich (50 - 500 kHz). Typische technische Anwendungen sind Hochspannungstests für Isolatoren [Har98, Phu91]. Auch wurde er als Spannungsquelle für Beschleuniger [Hof75, Mat82] und Röntgengeneratoren [Mes95] in Betracht gezogen. In leicht abgewandelter Form wird er auch zur Zündung von Kurzbogen-Metall dampfentladungslampen und Kurzbogen-Xenonlampen benützt.

Der klassische Aufbau eines Tesla-Transformators besteht aus einem Kondensator und einer Primärspule mit wenigen Windungen und ohne Spulenkern (Luftspule). Spule und Kondensator bilden einen Schwingkreis [Den01].

Viele wissenschaftliche Arbeiten und Untersuchungen zum Teslatransformator sind älteren Datums (z.B. [Obe95, Dru02, Lau07, Hoc32]). In neuerer Zeit untersucht wurde der Einfluss des Netzgeräts [Den01]. Andere Arbeiten beschäftigen sich mit Messmethoden und Computersimulationen [Hit83]. Für Computersimulationen existieren inzwischen verschiedene Programme (z.B. TSIM¹ und TCAP²). Neben wissenschaftlichen Arbeiten gibt es auch reichhaltige Informationen von Bastlern und Amateuren. Diese beschäftigen sich vor allem mit praktischen Aspekten des Baus von Tesla-Transformatoren. Im Rahmen von Schulprojekten ist der Bau einer Anlage und die Computermodellierung interessant. Dies vor allem auch, weil von Schülern wissenschaftspropädeutisches Arbeiten ohne enormen Ressourcenaufwand geleistet werden kann. Die in dieser Arbeit verwendeten Mittel sind z. B. für eine gymnasiale Mittelschule zugänglich. Für diese Arbeit wurde eine Tesla-Anlage verwendet, welche im Rahmen einer Maturarbeit entstanden ist. Diese wird mit einem Computermodell verglichen. Ziel der Arbeit war es dabei, eine korrekt funktionierende Simulation mittels eines Systemdynamikprogramms durchzuführen, um die Anlage zu optimieren.

Methoden

Theorie zur Computersimulation

Die Ausgangsgröße für die Simulation bildet die elektrische Ladung Q . Um die Bewegung der elektrischen Ladung im System beschreiben zu können, werden hier die einzelnen, über den Bauteilen der Anlage liegenden elektrischen Spannungen betrachtet. Der schematische Aufbau der Anlage ist in Fig.1 gezeigt.

¹ Program TSIM, erhältlich von der Tesla Secondary Simulation Group:
<http://www.abelian.demon.co.uk/tssp/model.html>.

² Program TCAP, Secondary Simulation Group:
<http://www.abelian.demon.co.uk/tssp/model.html>.

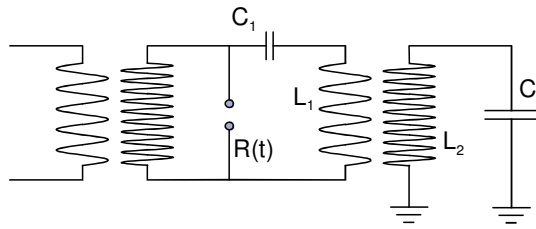


Fig.1. Aufbau eines Teslatransformators: Die Primärspule ist durch die Induktivität L_1 und die Sekundärspule durch L_2 bezeichnet, C_1 ist die Kapazität des Kondensators im Primärkreis und $R_1 = R(t)$ stellt den elektrischen Widerstand dar, welcher vor allem mit der Funkenstrecke assoziiert ist. C_2 ist die Kapazität des Sekundärkreises.

Es wird hier von einer Anlage ausgegangen, welche mittels eines Netzfrequenz-Transformators (50 Hz) versorgt wird. Dieser lädt den Kondensator auf einen bestimmten Wert auf. Bevor die Spitzenspannung (ca. 15 - 18 kV) überschritten wird, zündet die Funkenstrecke und der Kondensator entlädt sich blitzartig. Die elektrische Spannung bzw. die elektrische Ladung als Funktion der Zeit lässt sich mittels der Maschenregel finden: Für die Summe der Spannungen U_k im Primärstromkreis kann geschrieben werden: $U_C + U_R + U_L = 0$. Dabei ist U_C die Spannung über dem Kondensator, U_L die Spannung über der Induktivität L_1 (Primärkreis) und U_R die Spannung über der Funkenstrecke (mit dem Widerstand R_1). Mit der im Kondensator des Primärkreises gespeicherten elektrischen Ladung $Q_1 = C_1 U_C$, dem Ohmschen Gesetz $U_R = R_1 I_1$ (der Stromfluss durch den Primärtransformator wird vernachlässigt, da für die hier auftretenden Hochfrequenzschwingungen die Impedanz gegen Unendlich geht) und dem Induktionsgesetz resultiert für den Primärkreis (mit $I_1 = dQ_1 / dt$):

$$\frac{d^2 Q_1}{dt^2} = -\frac{1}{L_1 C_1} \cdot Q_1 - \frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} \quad (1)$$

Zentral für die Simulation des Tesla-Transformators ist die Übertragung der Schwingungen vom Primär- auf den Sekundärkreis und die Rückkopplung zwischen den beiden Stromkreisen. Im Prinzip handelt es sich um zwei gekoppelte Schwingkreise mit der Kopplungskonstante M / L_i . Zur Gleichung (1) muss nun eine zweite Systemgleichung hinzugefügt werden, welche den Sekundärkreis beschreibt:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_1}{dt^2} &= -\frac{1}{L_1 C_1} \cdot Q_1 - \frac{R_1}{L_1} \cdot \frac{dQ_1}{dt} - \frac{M}{L_1} \cdot \frac{d^2 Q_2}{dt^2} \\ \frac{d^2 Q_2}{dt^2} &= -\frac{1}{L_2 C_2} \cdot Q_2 - \frac{R_2}{L_2} \cdot \frac{dQ_2}{dt} - \frac{M}{L_2} \cdot \frac{d^2 Q_1}{dt^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Die Kopplungsinduktivität M berücksichtigt den Umstand, dass die Änderung des Stromes durch die Primärspule und die damit verbundene Änderung des magnetischen Flusses eine Spannung in der Sekundärspule induziert und umgekehrt. Für die Simulation wird in diesem Projekt die Simulationssoftware Vensim³ verwendet. Für die Implementierung werden die Differentialgleichungen (2) in zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zerlegt:

$$\frac{dI_1}{dt} = -\frac{Q_1}{L_1 C_1} - \frac{R_1}{L_1} \cdot I_1 - \frac{M}{L_1} \frac{dI_2}{dt}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = I_1$$
(3)

Für den Sekundärstromkreis ergeben sich die analogen Gleichungen durch Vertauschen der Indizes. Die elektrische Spannung über dem Kondensator ergibt sich für den Primärkreis aus $U_C = Q_1 / C_1 = U_C(t)$. In Analogie dazu lässt sich die Spannung im Sekundärkreis aus Q_2 und C_2 berechnen.

Zündet der Funke über der Primärfunkenstrecke, so wird das System zu Schwingungen angeregt. Bei Teslatransformatoren liegen die Frequenzen im Bereich von 50 - 500 kHz. Im Vergleich dazu erfolgt das Zünden der Funkenstrecke nur 100-mal pro Sekunde, wenn das System mit einem Netztransformator versorgt wird. Je nach Funkenstrecke wird aber der Strom nicht einfach ein- und ausgeschaltet. Die genauen Prozesse an der Funkenstrecke sind noch recht unbekannt und schwierig zu simulieren [Lar98].

In Vensim (wie in vielen anderen Systemdynamikprogrammen) können die Systemgleichungen (3) mittels graphischer Oberfläche programmiert werden [Fuc02, Fis07]. Das entsprechende Flussdiagramm ist in Fig.2 wiedergegeben. Die zeitlichen Änderungen (Ableitungen) sind in Fig.2 als Flüsse (Pfeile) dargestellt. Dabei bedeutet z.B. dI_1 die zeitliche Ableitung (also Änderung) des Stroms im Primärkreis (also $dI_1 / dt = d^2 Q_1 / dt^2$). Die rechteckigen Kästen entsprechen den Speichergrößen (hier also dem Strom und der Ladung). Die Systemgleichungen werden dann wählbar mittels Euler-Cauchy oder Runge-Kutta-Verfahren integriert. Um die Kopplung der beiden Stromkreise implementieren zu können, wurde der durch den Sekundärkreis im Primärkreis induzierte Strom I_{21} ($=I_{21}$) separat berechnet. Dieser wird bei jedem Berechnungsschritt über die Ladungsänderung dQ_1 zum Strom I_1 ($= I_1$) dazu addiert. Es wurde auch eine symmetrische Variante geprüft, bei welcher in beiden Stromkreisen die induzierten Ströme separat berechnet und als direkte Einflüsse in die Speichergrößen I_1 bzw. I_2 programmiert wurden. Bis auf gewisse Unterschiede bezüglich numerischer Genauigkeit (Anzahl Gleichungen!) sind die Resultate identisch.

Für die Widerstände im Primär- und Sekundärkreis werden im Modell von Fig.2 die zeitlich konstanten Werte $R_1 = R_1$ und $R_2 = R_2$ gewählt. Es wird dabei angenommen, dass bei brennendem Lichtbogen sich der Widerstand kaum ändert.

³ Vensim Version 5: Ventana Systems Inc., Harvard, MA

Aufbau der Experimentieranlage

Die Anlage besteht in ihren wesentlichen Teilen aus einem Hochspannungs-Netztransformator, welcher den Primärkreis versorgt, einer Funkenstrecke, einem Hochspannungskondensator und zwei ineinander gestellte Luftspulen (Fig.3).

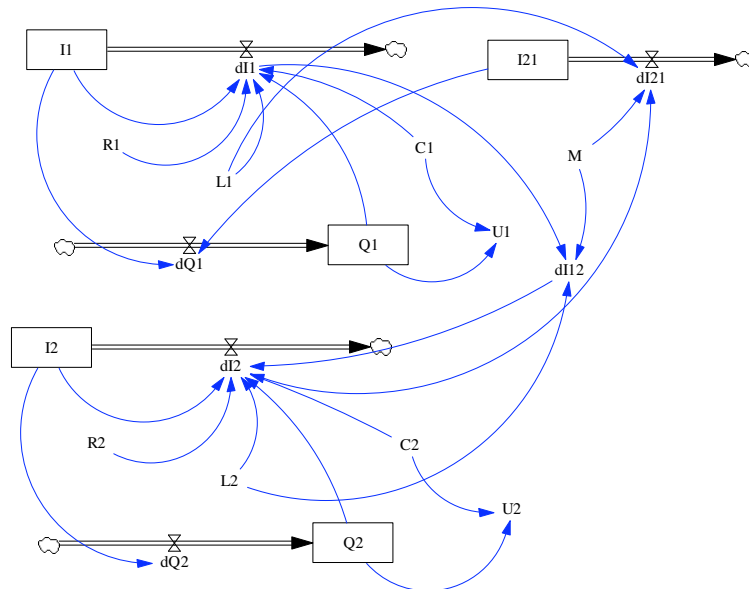


Fig.2. Flussdiagramm eines Teslatransformators, erstellt mit Vensim: Es werden über die Ladungen $Q_1 (= Q_1)$ und $Q_2 (= Q_2)$ die Spannungen U_1 im Primär- und U_2 im Sekundärkreis berechnet. Die Rückkopplung von Sekundärstromkreis auf den Primärstromkreis erfolgt über den Induktionsstrom $I_{21} (= I_{21})$.

Als Speisetransformator diente ein Zündtransformator für Ölheizungen (Trafo-Union, Typ ZM 20/12). Für den Primärkreis wurde eine sehr einfache Form einer Funkenstrecke verwendet. Die eine Elektrode besteht aus einem Messingstift mit einem Durchmesser von 4 mm, die andere Seite wird durch einen Weicheisenstab (Durchmesser 12 mm) gebildet. Bei der bestehenden Anlage erfolgt die Zündung bei 15.6 ± 0.5 kV. Bei höheren Leistungen müsste allerdings mit einer rotierenden Funkenstrecke gearbeitet werden [Sch04, Den01], oder Kühlung und Löschen des Funkens werden durch Pressluft bewirkt.

Die Luftspule des Primärkreises besitzt 10.6 Windungen und eine Induktivität von $L_1 = (1.54 \pm 0.05) \cdot 10^{-5}$ H. Für die Frequenz ergibt sich aus $C_1 = 9.6 \pm 0.5$ nF und L_1 413.9 ± 18.3 kHz. Für die Versuche wurden verschiedene Sekundärspulen verwendet. In Tab.1 sind die verschiedenen Parameter für die drei Spulen aufgeführt.

Durch die vielen Drahtwindungen ist der Ohmsche Innenwiderstand der Sekundärspule nicht mehr vernachlässigbar, er addiert sich deshalb zum Anteil der Funkenstrecke (Werte in Tab.1). Es muss auch die Kapazität dieser Spule berücksichtigt werden, da auf der grossen Drahtoberfläche die Speicherung von Ladungen nicht mehr vernachlässigt werden kann. Für die Berechnung der Kapazität im Sekundärkreis

schlägt Nicholson ein Modell vor, welches die Kapazität von Spule und der Umgebung berücksichtigt [Nic00]. In dieser Arbeit wurde jedoch für die Berechnung der Kapazität C_{2L} ein stark vereinfachtes Modell angewendet. Dabei wird die Sekundärkapazität C_2 in zwei parallel geschaltete Kondensatoren aufgespalten ($C_2 = C_{2L} + C_{top}$), wobei der eine Teil die Spulenkapazität C_{2L} und der andere die Konduktorkugel (C_{top}) am oberen Ende der Spule repräsentiert.

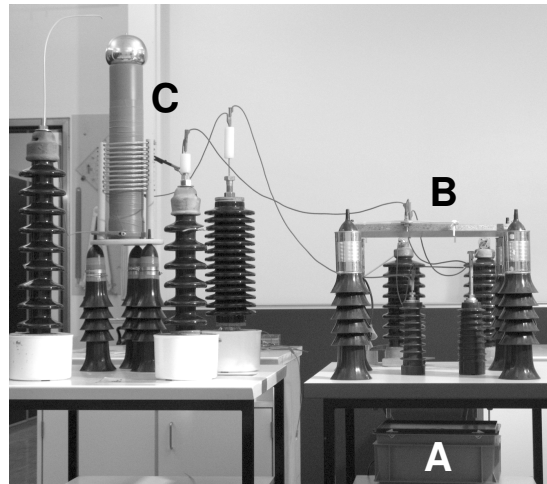


Fig.3. Aufbau der Experimentieranlage: Die Anlage besteht im Wesentlichen aus dem Netztransformator (A), der Kondensatoreinheit mit Funkenstrecke (B) und den ineinander liegenden Luftspulen mit terminaler Konduktorkugel (C).

Tab.1. Parameter für die drei verwendeten Sekundärspulen: Die Induktivitäten sind mittels Eq.9 berechnet. Die Widerstände R_{2L} sind die Ohmschen Widerstandsanteile und C_2 die Gesamtkapazitäten im Sekundärkreis.

	Spule 1	Spule 2	Spule 3
Länge s	325.0 ± 3.0 mm	311.5 ± 0.5 mm	371.0 ± 0.5 mm
Radius r_L	55.0 ± 0.2 mm	55.0 ± 0.2 mm	52.5 ± 0.5 mm
Anz. Windungen N	1300 ± 20	1246 ± 5	874 ± 50
Induktivität L_2	53.1 ± 1.7 mH	50.6 ± 0.9 mH	19.6 ± 2.7 mH
Kapazität C_2	2.67 ± 0.03	2.61 ± 0.02 pF	2.87 ± 0.02 pF
Widerstand R_{2L}	155.6 ± 3.0 Ω	149.1 ± 1.1 Ω	39.0 ± 6.1 Ω

Resultate

Zur Verifikation des Modells wurden die Messungen und Simulationen von Denicolai verwendet [Den01]. Es wurden die gleichen Parameter eingegeben, welche Denicolai

für seine Simulation verwendete. Die Simulation mit dem Modell in Fig.2 ergab im unbelasteten Zustand eine Spitzenspannung von 350 kV bei einer Frequenz im Sekundärschwingkreis (68 kHz), was sowohl mit den Simulationswerten von Denicolai, als auch mit den realen Messwerten an der Anlage übereinstimmt.

Für die in Fig.2 gezeigte Anlage wurde die Sekundärspannung aus der Überschlagsdistanz abgeschätzt. Die erhaltenen Sekundärspannungen dienten als Anhaltspunkte für die Computersimulation. Es wurden die Parameter in Tab.1 verwendet. Für den Widerstand R_1 im Primärkreis sind Werte zwischen 1-2 Ω realistisch [Den01]. Für den Widerstand der Funkenstrecke R_{2gap} wurde entsprechend der deutlich längeren Distanz 10 Ω genommen. Der Gesamtwiderstand im Sekundärkreis beträgt demnach $R_2 = R_{2L} + R_{2gap}$. Beide Widerstände beeinflussen vor allem die Dämpfung des Systems. Die maximale Sekundärspannung hingegen ist kaum von diesen Widerständen abhängig. Sehr viel wichtiger ist aber die Kopplungsinduktivität M . Die Kopplung der Schwingkreise wird durch die Grösse und Lage der Spulen beeinflusst. Der Kopplungsfaktor lässt sich als feste Grösse durch Anpassen der Simulation aus den gemessenen Spannungswerten ermitteln. Für Spule 1 resultierte $M = 10 \pm 1$ H, für die Spule 2 $M = 14 \pm 1$ H und für Spule 3 $M = 74 \pm 1$ H. Die Kopplungsinduktivitäten sind alle deutlich kleiner, als die von Denicolai bestimmten Werte, welche sich je nach Höhe der Primärspule zwischen 302.05 H und 634.05 H liegen [Den01]. Bei einer Kopplungsinduktivität von 100 H würde sich gemäss der Simulation von Fig.4 eine Spitzenspannung von rund 700 kV ergeben, was allerdings deutlich die Isolierfähigkeit der Anlage übersteigt.

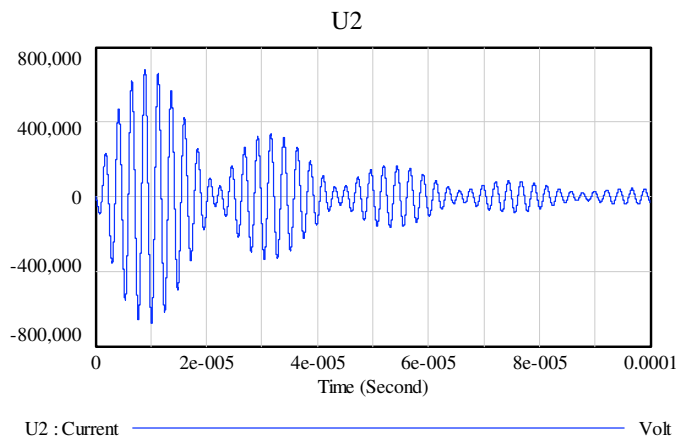


Fig.4. Zeitlicher Verlauf der Sekundärspannung bei der Verwendung der Spule 1 mit einer hypothetischen Kopplungsinduktivität von 100 H in der Simulation: Gerechnet mit Runge-Kutta-Verfahren, $\Delta t = 0.2 \cdot 10^{-9}$ s.

Andere Optimierungsmöglichkeiten ergeben sich durch die Anpassung der Kapazitäten im Primär- und Sekundärkreis. Im Sekundärschwingkreis kann diese vor allem durch die Modifikation der Konduktorkugel erreicht werden. Anstelle von einer kugelförmigen Oberfläche wird in der Regel ein Torus verwendet. Mit einem solchen Torus wird

auf relativ einfache Art eine grössere Oberfläche und damit Kapazität erreicht. Hohe Sekundärspannungen werden aber vor allem dann erreicht, wenn die Resonanzfrequenz des Sekundärkreises nahe derjenigen des Primärkreises liegt. Mit den Werten der Spule 1 wurden verschiedene Simulationen gerechnet, wobei die Sekundärkapazität variiert wurde. Die Sekundärspannung als Funktion von C_2 zeigt Fig.5.

In Fig.5 ist gut zu sehen, dass die verwendete Konduktorkugel nur wenig unterhalb des Wertes liegt, welcher für die maximale Spannung (178 kV bei 2.775 pF) notwendig wäre. Dies entspricht einer Frequenz von 414.6 kHz, was mit der berechneten Frequenz des Primärkreises von 413.9 ± 18.3 kHz recht gut übereinstimmt. Weitere Vergleiche zwischen Messungen und Simulationen ergaben auch für Spule 2 und 3 eine gute Übereinstimmung.

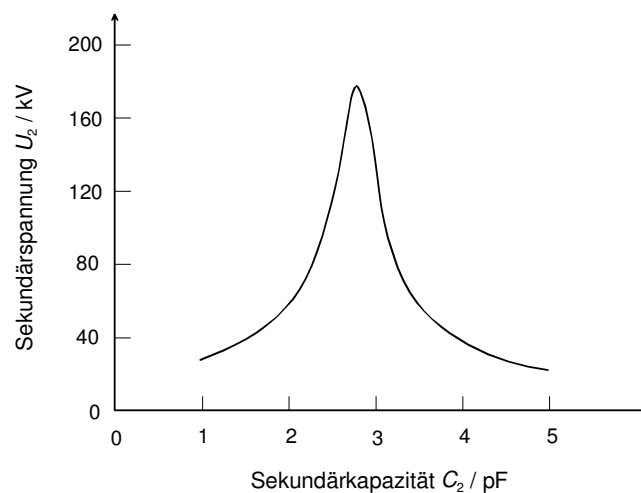


Fig.5. Sekundärspannung $U_2 = U_2(C_2)$ als Funktion der Sekundärkapazität: Gerechnet (Computersimulationen) für Spule 1.

Diskussion und Ausblick

Die Computersimulation mit Vensim führt zu Ergebnissen, welche sowohl mit der Theorie zum Tesla-Transformator als auch mit den experimentellen Messungen recht gut übereinstimmen. Es lassen sich für die Optimierung eines Tesla-Transformators durch die Simulation konkrete Erkenntnisse gewinnen. Das in dieser Arbeit vorgestellte theoretische Modell berücksichtigt allerdings einige Punkte nur rudimentär oder gar nicht. So ist das Modell zur Berechnung der Sekundärkapazität ist recht ungenau. Vor allem die Berechnung der Kapazität der Sekundärspule ist eher als grobe Abschätzung zu betrachten.

Die bestehende Simulation wurde auch im Rahmen von Projekt- und Maturarbeiten eingesetzt. Im Zusammenhang mit der Experimentieranlage ergeben sich hervorragende Möglichkeiten für weiterführende Projekte, welche durch Schülerinnen und Schüler gut bearbeitbar sind.

Literatur

- [Den01] Denicolai, M. (2001): Tesla Transformer for Experimentation and Research. *Licentiate Thesis, 2001, Helsinki University of Technology*
- [Dru02] Drude, P. (1902): Zur Konstruktion von Teslatransformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduktion von Drahtspulen. *Annalen der Physik*, Band 9, **4**, 1902.
- [Fis07] Fishwick, P. A.: The Languages of Dynamic System Modeling. In *Fishwick, P.A. (Ed.): Handbook of Dynamic System Modeling*. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2007; 1-12.
- [Fuc02] Fuchs, H.U., Weber, K., Schuetz, E.: Modelling of uniform dynamical systems. Zürich: Orell Füssli Verlag, 2002.
- [Har98] Hardt, N., Koenig, D. (1998): Testing of insulating materials at high frequencies and high voltage based on the Tesla transformer principle. *Conference record of the 1998 IEEE International Symposium on Electrical Insulation*, **2**, 1998, 517-520.
- [Hit83] Hitchcock, R.N., Stanton, S.J., Levy et. al (1983): Computer modelling of medium coupled resonant air core transformers including resistive losses. *4th IEEE Pulsed Power Conference, Albuquerque, New Mexico, 1983*.
- [Hoc32] Hochhäusler P. (1932): Der Teslatransformator als Hochfrequenzprüfgenerator und seine Untersuchung mit dem Kathodenoszillographen. *Archiv für Elektrotechnik*, **26**, 1932, 518-534.
- [Hof75] Hoffmann, C. R. J. (1975): Tesla Trasformer high-voltage generator. *Review of Scientific Instruments*, **46**, 1, 1975; 1-4.
- [Lar98] Larsson, A., Bondiou-Clergerie, A., Gallimberti, I. (1998): Numerical modelling of inhibited electrical discharges in air. *J.Phys. D. (Appl. Phys)*, **31**, 1998; 1831 – 1840.
- [Lau07] Lauer, L. (1907): Ueber die an einem Teslapol auftretenden Potentiale und das Verhältnis von Funkenschlagweite und Spannung an derselben. *Dissertation, 1907, Georg-August-Universität zu Göttingen*.
- [Mat82] Matsuzawa, H., Suganomata, S. (1982): Design charts for Tesla-transformer-type relativistic electron beam generators. *Review of Scientific Instruments*, **53**, 5, 694-696.
- [Mes95] Mesyats, G. A., Shpak, V. G. et. al. (1995): RADIANT-EXPERT portable High-Current accelerator. *Tenth IEEE International Pulsed Power Conference*, **1**, 1995; 80-92.
- [Nic00] Nicholson, P. (2000): Secondary Basics. *Document pn2511. Manuscript from the Tesla Secondary Simulation Group, <http://www.abelian.demon.co.uk/tssp> (25.11.2000)*
- [Obe95] Oberbeck, A. (1895): Ueber den Verlauf der elektrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen. *Annalen der Physik und Chemie*, **55**, 1895.
- [Phu91] Phung, B. T., Blackburn, T. R. et. al (1991): Tesla Transformer Design and Application in Insulator Testing. *Seventh International Symposium on High Voltage Engeneering*, **5**, 1991, 133-136.
- [Sch04] Schraner, K. (2004): UBTT – Funktion & Betrieb (Uni-Bern-Tesla-Twin). *http://home.tiscalinet.ch/m_schraner/UBTT-Betrieb.pdf (20.11.05)*