

# Über schwimmende Balken

Wolfgang Greutz, Peter Gallin, Kantonsschule Zürcher Oberland

## 1 Einleitung

Der Name Archimedes wird wohl zuerst — wenn auch nicht nur — mit dem Auftrieb in Verbindung gebracht. Wenn wir lesen, was Archimedes selbst darüber geschrieben hat<sup>1</sup>, gibt es für uns zwei Überraschungen. Erstens betrachtete er den Auftrieb wahrhaft „global“. Gleich in §2 schreibt er: „Die Oberfläche jeder in Ruhe befindlichen Flüssigkeit ist eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt der Erde ist.“ und beweist es in der für ihn typischen Weise. Die zweite Überraschung war, dass sich Archimedes auch mit dem Problem der stabilen Schwimmlagen beschäftigt hat. Nach einigen Sätzen über Kugelsegmente widmet er sich hauptsächlich den Paraboloidsegmenten<sup>2</sup>.

Wir wollten uns nun zuerst näher liegende und vermeintlich einfachere Beispiele für eine Auseinandersetzung mit dem Thema Schwimmstabilität vornehmen: längliche Balken mit quadratischem Querschnitt. Angeregt durch eine Aufgabe von Peter Gallin hatte sich Wolfgang Greutz schon früher damit beschäftigt, wie ein solcher Balken mit der Dichte  $0.5 \text{ g/cm}^3$  in Wasser mit der Dichte  $1 \text{ g/cm}^3$  schwimmt. Eine mathematische Analyse<sup>3</sup> zeigt, dass einzig diejenige Lage stabil ist, bei der die Diagonale des Quadrates in der Wasseroberfläche liegt. Ein Augenschein mit einem Holzbalken passender Dichte bestätigte dies auch experimentell. Nun interessierte uns, wie die stabilen Gleichgewichtslagen für den ganzen in Frage kommenden Dichtebereich aussehen.

## 2 Theorie der stabilen Schwimmlage

Die Ausführungen in diesem Teil basieren auf einer Lehrbuchdarstellung<sup>4</sup>. Wir betrachten im Aufriss (Abb. 1) einen schwimmenden Körper mit Schwerpunkt  $S$ , in dem die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  angreift. Als Displacement wird der Körper der verdrängten Flüssigkeit bezeichnet. Sein Schwerpunkt  $S_D$  kann als Angriffspunkt der Auftriebskraft  $\vec{F}_A$  angesehen werden. Ein schwimmender Körper ist im Gleichgewicht (Gesamtkraft null, Gesamtdrehmoment null), wenn das Displacement gleich schwer wie der Körper ist ( $F_A = F_G$ ) und der Schwerpunkt  $S$  des Körpers und der Schwerpunkt  $S_D$  des Displacements auf einer gemeinsamen vertikalen Linie liegen. Im Folgenden wird die erste Bedingung als erfüllt angesehen und es werden nur die Drehmomente betrachtet. Das Gleichgewicht ist in jedem Fall stabil, wenn  $S$  unter  $S_D$  liegt. Wenn  $S$  über  $S_D$  liegt, muss es aber nicht unbedingt labil sein. Es wird nur dieser zweite Fall verfolgt.

Um die Stabilität zu untersuchen, stellen wir uns vor, das schwimmende Objekt werde um seine Längsachse mit einem kleinen Winkel  $\delta\phi$  gedreht. Dadurch ändert sich die Form des Displacements, und die Lage seines Schwerpunktes  $S_D$  müsste neu bestimmt werden (Abb. 1). In erster Näherung können

<sup>1</sup>„Über schwimmende Körper“ in: Abhandlungen von Archimedes. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 201, Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt a. M., 2. Auflage, 1999

<sup>2</sup>Kommentare, weiterführende Überlegung und vor allem animierte Simulationen dazu sind auf der Website von Cris Rorres zu finden: <http://www.math.nyu.edu/~crrorres/Archimedes/Floating/floating.html>

<sup>3</sup>Peter Gallin: 101 Mathematikaufgaben. Aulis Verlag Deubner und Sabe Verlag, 1997, S. 119-125

<sup>4</sup>Hans Ziegler: Mechanik. Band I, Birkhäuser Verlag Basel, 3. Auflage, 1960, S. 129ff

wir aber  $S_D$  als unverändert in Bezug auf den schwimmenden Körper ansehen und dafür das Kräftepaar  $\delta\vec{F}_A$  und  $\delta\vec{F}'_A$  in Rechnung stellen, das durch den zusätzlichen bzw. wegfallenden Auftrieb entsteht. Diese Kräfte greifen in den Schwerpunkten der beiden schraffierten Flächen an, deren Abstand bei infinitesimaler Drehung  $2w/3$  (Schwerpunktslage in einem Dreieck) ist, wobei  $w$  die Länge der Wasserlinie senkrecht zur Drehachse ist (Abb. 1 und 2).

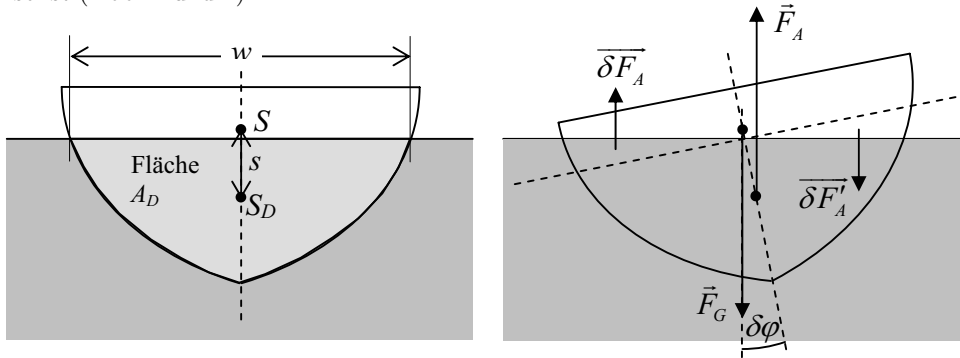


Abb. 1: Aufritt mit Displacement und seiner Veränderung

Durch Beschränkung auf Fälle, bei denen die Schnittfläche des schwimmenden Körpers mit der Wasseroberfläche rechteckig ist (mit der Drehachse parallel zu einer Rechteckseite), umgehen wir die Integralrechnung (Abb. 2).

Es sei nun  $s$  der Abstand der Schwerpunkte  $S$  und  $S_D$ ,  $\rho_{Fl}$  die Dichte der Flüssigkeit,  $g$  die Fallbeschleunigung und  $l$  die Länge der Wasserlinie parallel zur Drehachse. Bei Drehung um den Winkel  $\delta\phi$  (in Bogenmass) im Gegenuhrzeigersinn entstehen durch die beiden Kräftepaare  $\vec{F}_A$  und  $\vec{F}_G$  bzw.  $\delta\vec{F}_A$  und  $\delta\vec{F}'_A$  zwei einander entgegengesetzte Drehmomente  $\delta M_1$  bzw.  $\delta M_2$ :

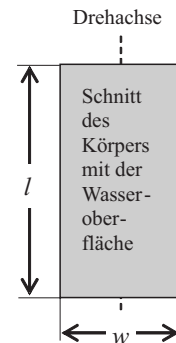


Abb. 2: Grundriss

- $\delta M_1 = -F_A \cdot s \delta\phi = -\rho_{Fl} g A_D l s \delta\phi$  (im Gegenuhrzeigersinn), wobei die Beträge der Auftriebs- und der Gewichtskraft  $F_A = F_G = \rho_{Fl} g V_D$  durch das Volumen  $V_D$  und dieses als Produkt von Querschnittsfläche  $A_D$  und Länge  $l$  des Displacements ausgedrückt wurden.

- $\delta M_2 = \delta F_A \cdot \frac{2}{3} w = \rho_{Fl} g \cdot \frac{1}{2} \frac{w \delta\phi}{2} \frac{w}{2} l \cdot \frac{2}{3} w = \frac{1}{12} w^3 l \rho_{Fl} g \delta\phi$  (im Uhrzeigersinn) mit  $\delta F_A = \delta F'_A$

Die Schwimmelage ist *nicht labil*, wenn  $\delta M = \delta M_1 + \delta M_2 \geq 0$ .

Dies ist gleichbedeutend mit  $\frac{1}{12} w^3 l \rho_{Fl} g \delta\phi - \rho_{Fl} g A_D l s \delta\phi \geq 0$ , was auf die Stabilitätsbedingung

$$\frac{w^3}{12} \geq A_D \cdot s \tag{1}$$

führt. Im Folgenden soll „stabil“ gleichbedeutend mit „nicht labil“ sein.

### 3 Der Balken mit quadratischem Querschnitt

Wir setzen die Kantenlänge des Querschnittquadrats auf 1. Die Länge  $l$  des Balkens sei viel grösser als die Kantenlänge, so dass die in Frage kommende Drehachse parallel zum Balken verläuft. Die Dichten von Balkenmaterial und Flüssigkeit sollen im Verhältnis  $z \leq 1$  stehen. Damit stehen auch die Querschnittsfläche des Deplacements ( $A_D$ ) und die Querschnittsfläche des Balkens (1) in diesem Verhältnis:  $A_D = z$ .

#### 3.1 Aufrechte Schwimmelage

Die aufrechte Schwimmelage ist auf jeden Fall eine Gleichgewichtslage. Wir wollen nun untersuchen, für welche Dichteverhältnisse  $z$  diese stabil ist. Der Balken taucht  $z$  weit ein, wenn er „aufrecht“ schwimmt (Abb. 3). Die Querschnittsfläche des Deplacements ist  $A_D = z$ . Ausserdem ist  $w = 1$ . Der Abstand  $s$  der Schwerpunkte der Querschnittsflächen von Balken und Deplacement ist dann  $s = \frac{1}{2} - \frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - z)$ . Eine stabile Schwimmelage erhalten wir mit (1):  $\frac{1}{12} \geq \frac{z}{2}(1 - z) \Rightarrow z^2 - z + \frac{1}{6} \geq 0$ .

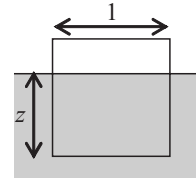


Abb. 3

Die Nullstellen der Funktion  $f(z) = z^2 - z + \frac{1}{6}$  liegen bei  $z = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$ . Die „aufrechte“ Schwimmelage ist also für Balken stabil, wenn

$$z \leq \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \approx 0.21 \quad \text{oder} \quad z \geq \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \approx 0.79 .$$

#### 3.2 Diagonale Schwimmelage

Für Balken jeder Dichte ist die „diagonale“ Lage, in der die Diagonale des Quadrats vertikal steht, eine Gleichgewichtslage. Die Frage ist also, für welche Dichteverhältnisse  $z$  diese stabil ist. Die Querschnittsfläche des Deplacements ist natürlich wieder  $A_D = z$ . Daraus folgt, dass nun  $w = 2\sqrt{z}$  sein muss (Abb. 4). Offensichtlich gilt  $s = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}h$ , wobei  $h = \sqrt{z}$  die Höhe des eingetauchten Dreiecks von der Wasserlinie aus gemessen ist. Damit ergibt sich  $s = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{z}$ .

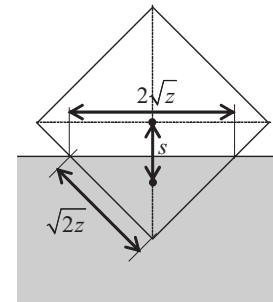


Abb. 4

Mit (1) erhält man die Bedingung für Stabilität:  $\frac{2}{3}z\sqrt{z} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\sqrt{z}\right)z$ . Nach Division durch  $z \neq 0$  erhält man  $z \geq \frac{9}{32} \approx 0.28$ . Ersetzt man  $z$  durch  $1 - z$  erhält man mit der gleichen Rechnung den Fall, dass in der diagonalen Schwimmelage drei Kanten unter Wasser sind. Damit folgt Stabilität auch für  $z \leq 1 - \frac{9}{32} \approx 0.72$ . Insgesamt gilt also in diesem Fall

$$0.28125 = \frac{9}{32} \leq z \leq \frac{23}{32} = 0.71875 .$$

#### 3.3 Zwischenbilanz

Im Folgenden bleibt zu klären, ob es in den drei bis jetzt erhaltenen Dichtebereichen  $0 < z \leq 0.21$ ,  $0.28 \leq z \leq 0.72$  und  $0.79 \leq z < 1$  noch weitere Gleichgewichtslagen gibt und ob diese stabil sind. Ausserdem sind in den restlichen Parameterbereichen die stabilen Schwimmlagen gesucht, von denen es mindestens eine für jeden Wert von  $z$  geben muss.

### 3.4 Eine bzw. drei Kanten über Wasser

Hierbei hat entweder das Displacement für  $z < 0.5$  oder der Teil über Wasser für  $z > 0.5$  einen dreieckigen Querschnitt. Wir betrachten den ersten Fall. Gesucht sind die Schwimmlagen, bei denen die Verbindungslinie der Schwerpunkte  $S$  und  $S_D$  senkrecht zur Wasserlinie steht. Die Ortsvektoren der Schwerpunkte können im angegebenen Koordinatensystem (Abb. 5) praktisch direkt abgelesen werden:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}_{S_D} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Der Vektor in Richtung der Verbindungslinie ist

$$\Delta \vec{r}_S = \vec{r}_S - \vec{r}_{S_D} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 - 2a \\ 3 - 2b \end{pmatrix}$$

und der Vektor in Richtung der Wasserlinie ist

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}.$$

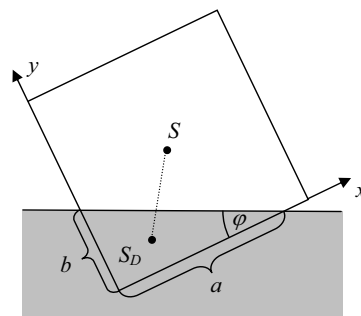


Abb. 5

In einer Gleichgewichtslage müssen die beiden letzten Vektoren senkrecht zueinander stehen. Ihr Skalarprodukt muss null sein:

$$\Delta \vec{r}_S \cdot \vec{w} = 3a - 2a^2 - 3b + 2b^2 = (a - b)(3 - 2(a + b)) = 0.$$

Die Lösung  $a = b$  wurde bereits in Abschnitt 3.2 abgehandelt. Die zweite Lösung der Gleichung lautet  $a + b = 1.5$ , was eine erstaunlich einfache Beziehung ist. Da die Dichte gegeben ist durch  $z = \frac{ab}{2} = A_D$ , folgt  $\frac{2z}{b} + b = \frac{3}{2} \Rightarrow z = \frac{3b}{4} - \frac{b^2}{2}$ . Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung für  $b$ , nämlich

$$b = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - 2z},$$

ergeben in ihrer Summe 1.5 und sind damit natürlich auch Lösungen für  $a$ . Weil weder  $a$  noch  $b$  grösser als 1 sein können, muss die Wurzel kleiner als 0.25 sein. Daraus folgt, dass die Dichte  $z$  im Intervall  $\left[\frac{1}{4}, \frac{9}{32}\right]$  liegt, also

$$0.25 \leq z \leq 0.28125.$$

Dabei entspricht  $z = 0.25$  dem Fall  $b = 1$  (oder auch  $a = 1$ ) und  $z = 0.28125$  dem Fall  $a = b = 0.75$ , der ja schon in Abschnitt 3.2 als Grenzfall auftrat. Da nun in diesem Dichteintervall für jeden Wert von  $z$  nur eine Gleichgewichtslage existiert, erübrigt sich der Nachweis der Stabilität. Ganz analoge Rechnungen und Überlegungen gelten für den Fall, dass genau eine Kante über Wasser liegt, die dann im entsprechenden Aufrissbild (Abb. 5) als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt wird. Als  $a$  und  $b$  können dann die entsprechenden Strecken über Wasser genommen werden. Es folgt, dass es im Dichtebereich

$$0.71875 \leq z \leq 0.75$$

ebenfalls nur eine Gleichgewichtslage gibt, die dann stabil sein muss.

Schliesslich kann mit  $\tan \phi = \frac{b}{a} = \frac{b^2}{2z}$  noch der Drehwinkel  $\phi$  als Funktion von  $z$  bestimmt werden:

$$\tan \phi = \frac{1}{16z} \left( 9 - 16z - 3\sqrt{9 - 32z} \right) \quad \text{für } 0.25 \leq z \leq 0.28125 \quad \text{und}$$

$$\tan \phi = \frac{1}{16(1-z)} \left( 9 - 16(1-z) - 3\sqrt{9 - 32(1-z)} \right) \quad \text{für } 0.71875 \leq z \leq 0.75.$$

### 3.5 Zwei Kanten über Wasser

Hier hat das Deplacement einen trapezförmigen Querschnitt. Die Lage des Schwerpunkts dieses Trapezes kann als gewichtetes Mittel der Schwerpunkte zweier Dreiecke (Abb. 6) berechnet werden. Die Schwerpunkte der beiden eingezeichneten Dreiecke sind:

$$\vec{r}_{S_{D_1}} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ b+c \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r}_{S_{D_2}} = \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ c \end{pmatrix} .$$

Als Gewichte treten dabei die (doppelten) Flächeninhalte  $b$  bzw.  $c$  auf:

$$\vec{r}_{S_D} = \frac{1}{3(b+c)} \left\{ b \begin{pmatrix} 1 \\ b+c \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ c \end{pmatrix} \right\} .$$

Der Schwerpunkt des Querschnitts des Körpers liegt wieder bei

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \text{ so dass } \Delta \vec{r}_S = \vec{r}_S - \vec{r}_{S_D} = \frac{1}{6(b+c)} \left\{ 2b \begin{pmatrix} 1 \\ b+c \end{pmatrix} + 2c \begin{pmatrix} 2 \\ c \end{pmatrix} - 3(b+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Mit dem Wasserlinienvektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ c-b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta \vec{r}_S \cdot \vec{w} = 0 \quad \text{folgt:} \quad (c-b)(1+2b^2+2bc+2c^2-3b-3c) = 0 .$$

Die Lösung  $b = c$  wurde im Abschnitt 3.1 abgehandelt. Aus  $1+2b^2+2bc+2c^2-3b-3c = 0$  ergibt sich zwischen  $b$  und  $c$  die Beziehung  $c(b) = \frac{3-2b \pm \sqrt{1+12b-12b^2}}{4}$ . Dabei ist für das Pluszeichen die Variable  $c$  nur dann nicht grösser als 1, wenn  $b$  zwischen 0.5 und 1 (inklusive) liegt. Die Variable  $c$  liegt dann ebenfalls in diesem Intervall. Für das Minuszeichen ist  $c$  nur dann nicht negativ, wenn  $b$  zwischen 0 und 0.5 (inklusive) liegt. In diesem Intervall liegt dann auch  $c$ .

Beachtet man nun, dass die Querschnittsfläche des Deplacements  $A_D = \frac{b+c}{2} = z$  beträgt, ergibt sich

$$z(b) = \frac{3+2b \pm \sqrt{1+12b-12b^2}}{8} .$$

Im Plus-Fall, wenn also  $0.5 \leq b \leq 1$ , folgt daraus, dass  $0.75 \leq z \leq \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.79$ . Analog ergibt sich für  $0 \leq b \leq 0.5$ , dass  $0.21 \approx \frac{3-\sqrt{3}}{6} \leq z \leq 0.25$ . Da in diesen beiden Intervallen

$$0.21 \approx \frac{3-\sqrt{3}}{6} \leq z \leq 0.25 \quad \text{und} \quad 0.75 \leq z \leq \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.79$$

für  $z$  keine weiteren Gleichgewichtslagen existieren, erübrigt sich der Nachweis der Stabilität, denn mindestens eine stabile Gleichgewichtslage muss es in jedem Dichtebereich geben.

Wenn man die Umkehrung  $b(z) = \frac{2z \pm \sqrt{12z-12z^2-2}}{2}$  bezieht, kann man auch hier mit  $\tan \phi = b - c = b - (2z - b) = 2(b - z) = \pm \sqrt{12z - 12z^2 - 2}$  den Drehwinkel direkt aus dem Dichteverhältnis berechnen.

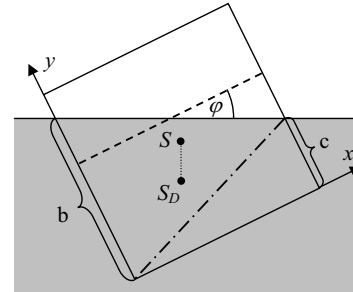


Abb. 6

### 3.6 Zusammenfassung der Theorie

Wir können nun die Fragen aus 3.3 beantworten: Da in 3.4 und 3.5 keine neuen Gleichgewichtslagen für die drei Parameterbereiche aus 3.1 und 3.2 hervorgingen, gibt es für den langen Balken mit quadratischem Querschnitt für jedes Dichteverhältnis nur eine stabile Gleichgewichtslage beim Schwimmen an der Oberfläche einer Flüssigkeit. Eine Übersicht gibt die folgende schematische Darstellung (Abb. 7):

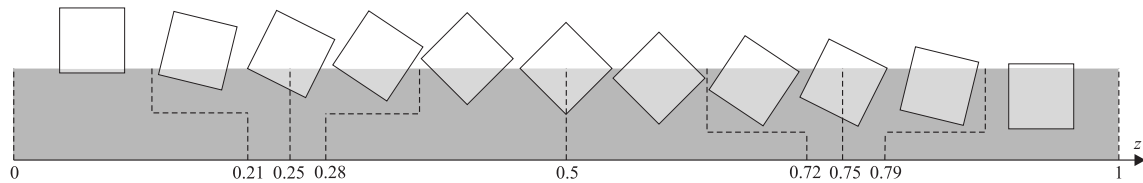


Abb. 7

### 3.7 Experimente

Erste Versuche mit Holzquadern zeigten, dass dieses Material wegen der Inhomogenität ungeeignet ist. Daher wurden Hohlkörper aus PVC mit den äusseren Abmessungen  $10.0 \times 10.0 \times 24.0 \text{ cm}^3$  und verschiedenen Wandstärken hergestellt. Die Versuche wurden bei ca.  $22^\circ\text{C}$  vorgenommen. Die Dichte des Wassers beträgt bei dieser Temperatur  $0.9975 \text{ g/cm}^3$ . Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Ergebnisse:

Nr.	Masse des Körpers (g)	Dichte des Körpers ( $\text{g/cm}^3$ )	$z$	Neigung theoretisch	Neigung gemessen
1	455.9	0.1900	0.1905	$0^\circ$	$1.5^\circ$
2	604.6	0.2519	0.2525	$27.3^\circ$	$28^\circ$
3	743.9	0.3100	0.3107	$45.0^\circ$	$45^\circ$
4	1586	0.661	0.663	$45.0^\circ$	$46^\circ$
5	1829	0.762	0.764	$22.0^\circ$	$23^\circ$
6	1993	0.830	0.832	$0^\circ$	$2.5^\circ$
Fehler	$\pm 0.1\%$	$\pm 0.4\%$	$\pm 0.5\%$		$\pm 0.5^\circ$

Die gemessenen Neigungswinkel wurden aus den nachfolgend abgebildeten Fotos (Abb. 8) abgelesen. Um die Fotos zu machen, wurde der Klotz so ins Wasser gelegt, dass keine Luftblasen an ihm haften blieben. Nach Beruhigung des Wassers und des Klotzes wurde letzterer langsam gegen die Frontscheibe driften gelassen, wo er durch Adhäsion haften blieb und bequem fotografiert werden konnte.

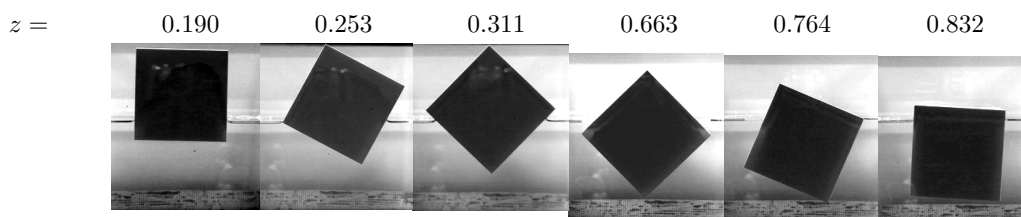


Abb. 8