DPK

Rotierender Regenschirm

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Das haben Sie sicher auch schon mal gemacht: im strömenden Regen mit dem Schirm in der Hand auf den Bus gewartet. Dreht man den Schirm, so fliegen die Tropfen in alle Richtungen weg und man befindet sich unter einer Art Glocke. Welche Form hat diese Glocke?

Wie immer, um einen ersten Eindruck zu gewinnen, produzierte ich auf dem Computer ein Bildchen. Der Rand des Regenschirms wurde als horizontaler, gleichmässig drehender Kreis modelliert, von dem sich Tropfen tangential zum Kreis ablösen und auf Wurfparabelbahnen weiter fliegen. Die Projektionen mehrerer solcher Bahnen mit gleichmässig verteilten Startpunkten wurden über einander gezeichnet (Abb. 1). Weil mir die Form der Glocke bekannt vorkam und weil in der Aufgabenstellung ja Wurfparabeln vorkommen, versuchte ich, die Hüllkurve als Parabel darzustellen (Abb. 2). Rein visuell scheint die Glocke also eine Rotationsparabel zu sein. Kann man das auch beweisen?

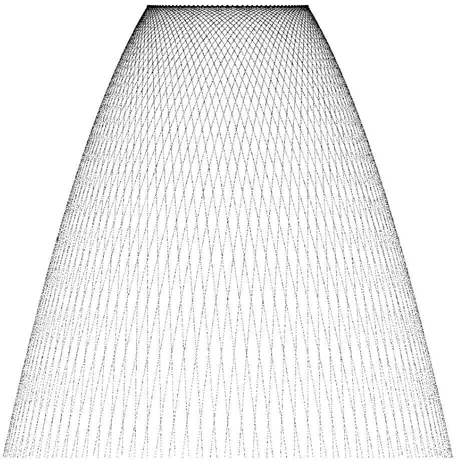

Abb. 1: Schar der Wurfparabeln von Teilchen, die sich von einem gleichmässig horizontal rotierenden Kreis lösen.

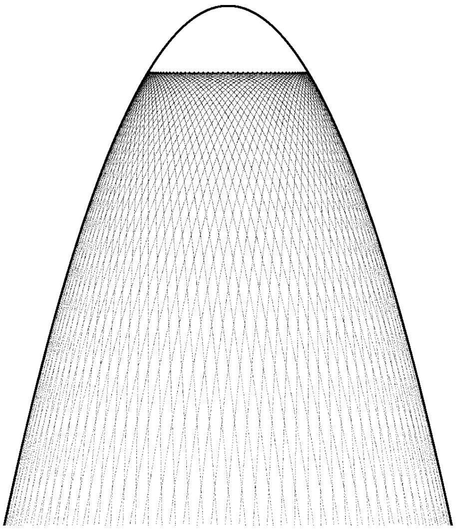

Abb. 2: Von Auge über die Hüllkurve gelegte Parabel.

Theorie

Die Bahnen der Tropfen seien Wurfparabeln, die am Schirmrand tangential zum Rand mit der momentanen Geschwindigkeit des Rands starten. Der Startort ist auf dem Schirm beim Ort $x_0 = r\sin\varphi$ mit Startgeschwindigkeit $\upsilon_{x0} = \upsilon_0\cos\varphi$ und $\upsilon_{y0} = 0$. Somit erhält man die Position eines Tropfens aus den zwei Gleichungen

$x = r\sin\varphi + t \cdot \upsilon_0 \cos\varphi$ und $y = -\frac{1}{2} g t^2$

Aus diesen Gleichungen kann man die Zeit eliminieren und erhält

$$y = -\tfrac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x - r\sin\varphi}{\upsilon_0 \cos\varphi} \right)^2 \qquad \text{Schar von Wurfparabeln}$$

Möchte man die Hüllkurve berechnen, so muss man diese Schargleichung partiell nach dem Scharparameter φ ableiten und Null setzen. Die resultierende Gleichung wird nach dem Scharparameter aufgelöst und in die Schargleichung eingesetzt. So erhält man die Gleichung der Hüllkurve.

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0 = -\tfrac{1}{2} g \cdot 2 \cdot \left(\frac{x - r\sin\varphi}{\upsilon_0 \cos\varphi} \right) \cdot \left(\frac{-r\cos\varphi}{\upsilon_0 \cos\varphi} + \frac{x - r\sin\varphi}{\upsilon_0 \cos^2\varphi} \sin\varphi \right)$$

$$0 = \frac{g}{\upsilon_0^2} \cdot \left(\frac{x - r\sin\varphi}{\cos\varphi} \right) \cdot \left(\frac{x\sin\varphi - r}{\cos^2\varphi} \right)$$

1. Lösung: $x - r\sin\varphi = 0$

Eingesetzt in die Schargleichung ergibt dies $y = 0$, d.h. die Gleichung des Schirmrands, wo alle Tropfen starten.

2. Lösung: $x\sin\varphi - r = 0$ respektive $\sin\varphi = r/x$

Setzt man das in die Schargleichung ein, so erhält man

$$y = -\tfrac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x - r\sin\varphi}{\upsilon_0 \sqrt{1 - \sin^2\varphi}} \right)^2 = -\tfrac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x - r^2/x}{\upsilon_0 \sqrt{1 - r^2/x^2}} \right)^2 = -\frac{g}{2\upsilon_0^2} \cdot \frac{\left(x^2 - r^2\right)^2}{x^2\left(1 - r^2/x^2\right)}$$

$$y = \frac{g}{2\upsilon_0^2} \cdot \left(r^2 - x^2\right) \qquad \text{Hüllkurve}$$

Diese Einhüllende ist somit eine oben abgeschnittene (Rotations-)Parabel.

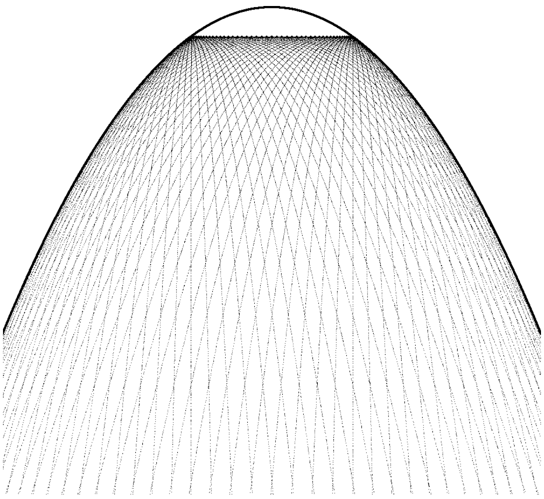

Abb. 3: Tropfen vom rotierenden Regenschirm mit parabolischer Hüllkurve (räumlich ein Rotationsparaboloid als Hüllfläche).

21. Juli 2008 / Lie.

P.S. Was passiert, wenn der Schirmrand in die Vertikale kippt? Fortsetzung folgt.