



## Fouriertransformation - exploratives Werkzeug im Unterricht

Stephan Scheidegger

### Einleitung

Die Fouriertransformation (FT) stellt ein wichtiges Verfahren in Technik und Wissenschaft dar. So beruhen die Bildrekonstruktionsalgorithmen bei modernen Computertomographen darauf [Buz04]. Auch in der digitalen Bildverarbeitung wird FT eingesetzt. Ein gutes Programm für die Demonstration von Bildfilterung und Effekten bei 2-dim. FT ist FTL-SE<sup>1</sup>. Aus der Elektrotechnik (v.a. Signaltheorie) ist die FT nicht mehr wegzudenken. In diesem Zusammenhang sei auch der Begriff des Spektrums genannt, der in den Naturwissenschaften weit verbreitet ist. Es gibt aber auch andere Gründe, weshalb die FT Thema im Unterricht sein kann. Die FT transformiert Daten: Anstelle einer Darstellung in einem Auslenkungs-Zeit-Diagramm tritt eine Darstellung in einem Amplituden-Frequenz-Raum – dabei wird eine andere Sichtweise auf die Daten möglich. Die thematische Einbindung der FT in den Unterricht kann im Kontext einer Reflexion über Sichtweisen und Standpunkte erfolgen – ein durchaus auch für den gymnasialen Unterricht sinnvolles Thema.

Ein Problem lässt sich auf verschiedene Weise darstellen. Jede Darstellungsweise entspricht quasi einem anderen Blickwinkel und gestattet andere Ein- und Ansichten des Problemfelds. Ein illustratives Beispiel dafür ist in Fig.1 abgebildet. Es handelt sich dabei um eine etwas andere Darstellung der Schweiz (entnommen aus dem Atlas der politischen Landschaften der Schweiz). Der ungewohnte Blick auf die Schweiz ergibt sich durch eine Transformation der Daten. Die räumlichen Koordinaten wurden durch politische Dimensionen (Links – Rechts; Liberal – Konservativ) ersetzt. Die Höhe entspricht der Einwohnerzahl des betreffenden Ortes (wobei die Landschaft durch Modellierung eines Berges mittels einer Gaussfunktion (Faltung) gebildet wird). Um einen Ort zu platzieren, wurde das Abstimmungsverhalten bei Volksabstimmungen über einen grösseren Zeitraum statistisch analysiert.

Anhand der Karte in Fig.1 lässt sich feststellen, dass die Sprachgrenze nicht zwingend auch eine politische Grenze sein muss. Sollen also bestimmte Fragestellungen bearbeitet werden, so ist es vorteilhaft, eine geeignete Darstellungsweise für die Daten zu finden. Die dafür benötigte Transformation der Daten lässt sich in der Regel mathematisch beschreiben.

Zwar ist der Zusammenhang der politischen Karte zum Thema FT nicht auf Anhieb offensichtlich, aber die Darstellung in Fig.1 zeigt ein kreatives und sinnvolles Beispiel, wie anhand einer Datentransformation Daten exploriert und Aussagen gewonnen werden können. Hier bestehen bemerkenswerte Parallelen zur Analyse von Schwingungen oder generell von Signalen. So können Frequenzen eines Signals einfach analysiert werden, wenn die Schwingung nicht in einem

<sup>1</sup> Weber, S., Aubert, E., Lecompte, C.: Fourier Transform Lab, Student Edition .  
www.jcrystal.com.

Auslenkungs-Zeit-Diagramm, sondern in einem Amplituden-Frequenz-Diagramm dargestellt werden.

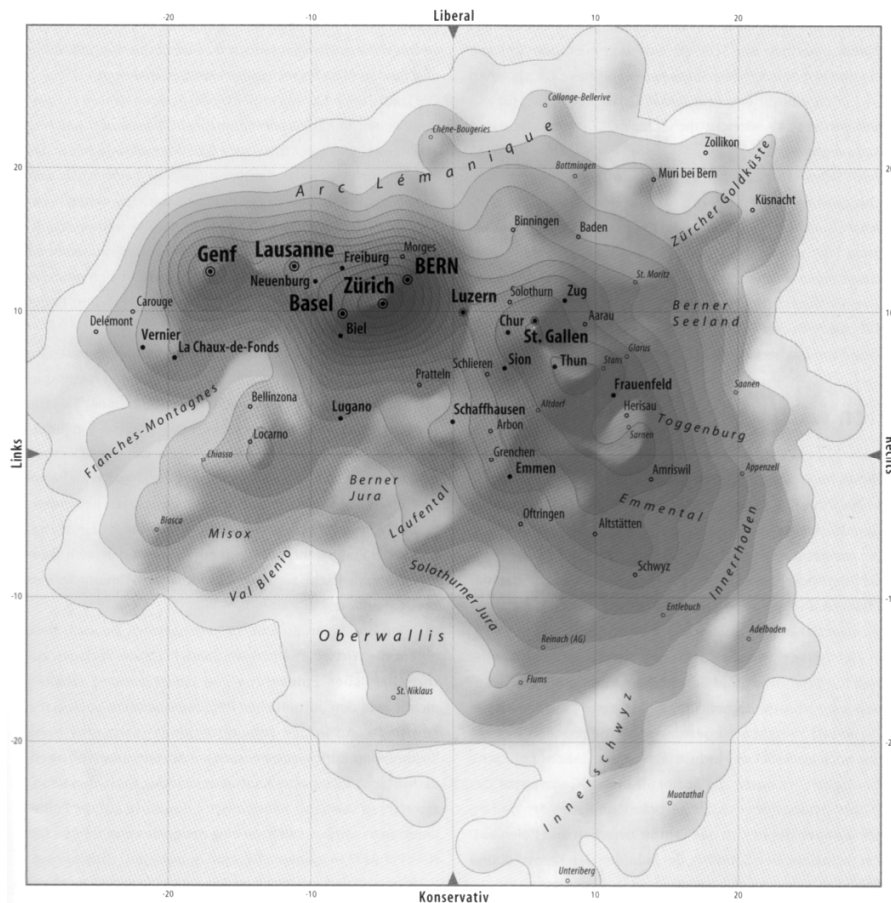


Fig.1. Politische Karte der Schweiz, aus dem Atlas der politischen Landschaften<sup>2</sup>.

Nebst dem Spektrum gibt es eine ganze Reihe weiterer möglicher Darstellungsweisen. So wird in diesem Beitrag ein Vergleich zum Histogramm gezogen. Eine weitere Variante, welche vor allem im Zusammenhang mit dynamischen Systemen interessant ist, sind Phasendiagramme.

In den zwei folgenden Abschnitten werden zwei Aspekte bei der Umsetzung im Unterricht vorgestellt. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Einführung der FT im Unterricht, der zweite mit einer möglichen Anwendung.

<sup>2</sup> Hermann, M., Leuthold, H.: Atlas der Politischen Landschaften – Ein weltanschauliches Porträt der Schweiz. Zürich: vdf Hochschulverlag, 2003.

## Numerische Berechnungstabelle für eine diskrete FT (DFT)

Im Prinzip lässt sich die FT ohne den Funktionsbegriff einführen [Sbl98]. Das Generieren von Listen durch Abtasten von Funktionen korrespondiert gut zum schrittweisen Vorgehen bei der Simulation eines dynamischen Systems mittels Eulerverfahren, wie dies im zweiten Teil dieser Arbeit vorgestellt wird. Dieser eher mathematischen Betrachtungsweise steht aber die physikalische Betrachtungsweise gegenüber, wo Lösungsfunktionen von Differentialgleichungssystemen wichtig sind. Deshalb wird im ersten Abschnitt eine rudimentäre Einführung beschrieben, welche auf dem Funktionsbegriff basiert.

Eine periodische, integrierbare Funktion  $f(t)$  mit der Periode  $T = 2\pi/\omega$  lässt sich durch eine unendliche Summe von Sinus- und Cosinus-Funktionen beschreiben:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega \cdot t) + b_n \sin(n\omega \cdot t)) \quad (1)$$

Dies ist die Fourierreihen-Entwicklung für  $f(t)$  mit den Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ . Diese Koeffizienten sind Amplituden und gehören zur Kreisfrequenz  $n\omega$  – sie bilden also quasi das Spektrum. Die Frage ist nun, wie sich diese Koeffizienten für ein beliebiges Signal bestimmen lassen. Für einige spezielle Funktionen lassen sich die Amplituden durch einfache Gesetze beschreiben. So kann eine Sägezahnkurve durch eine Summe von Sinusfunktionen mit  $n \in \mathbb{N}$  gebildet werden:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sin(n\omega \cdot t) \right) \quad (2)$$

wobei  $\omega$  eine beliebige Grundfrequenz ist. Auch eine Rechteckkurve kann einfach erhalten werden, wenn nur ungerade Werte für  $n$  genommen werden.

Dieses Konzept kann man sehr schön akustisch illustrieren. Es existieren verschiedene Computerprogramme (*Software-Synthesizer*), mit welchen ein Spektrum sichtbar und hörbar gemacht werden kann<sup>3</sup>.

Für eine beliebige, aber periodische Funktion können die Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  durch folgende Integrale bestimmt werden:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega \cdot t) \cdot dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega \cdot t) \cdot dt \end{aligned} \quad (3)$$

mit  $n \in \mathbb{N}$  (bei  $a_n$  auch noch  $n = 0$ ) und  $\omega = 2\pi/T$ . Das Integral für die Koeffizienten  $a_n$  entspricht einer Cosinus- und für die  $b_n$  einer Sinus-Fourier-Transformation. Generell kann die allgemeine Fouriertransformation (komplexe Darstellung) unter

<sup>3</sup> z.B. Falstad: [www.falstad.com](http://www.falstad.com) bietet eine ganze Reihe von sehr nützlichen Java-Applets für den Unterricht.

Verwendung der Formel von Euler in eine Summe aus Sinus- und Cosinustransformation zerlegt werden.

Die Integrale (3) lassen sich qualitativ gut begründen, ohne die höhere Mathematik in aller Breite und Tiefe verwenden zu müssen. Im Prinzip kann das folgende Integral betrachtet werden:

$$c = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot g(x) \cdot dx \quad (4)$$

Werden nun verschiedene, spezielle Fälle betrachtet (z.B.  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = \cos x$ , etc.), so lässt sich grob feststellen, dass der Wert von  $c$  davon abhängt, wie gut die Funktion  $f(x)$  in die Funktion  $g(x)$  passt (wie gut sich die Flächen zwischen Kurve und  $x$ -Achse überdecken). Ein anderer Weg führt über das Ausschreiben des Integrals (4) als Riemannsche Summe. Diese hat die Form eines Skalarprodukts. Die damit verbundene Verallgemeinerung der Begriffe Vektorraum und Orthogonalität passt gut zum Thema *unterschiedliche Sichtweisen*. Eine entsprechende Darstellung führt über die Verwendung von Listen, die man z.B. durch Abtasten einer Funktion erhält [Sbl98].

Die Integrale (3) können auch numerisch berechnet werden. Dies kann mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms geschehen (Tab.1). Dabei wird durch den Zeitraum  $t = 0$  bis  $t = T$  und durch den diskreten Frequenzraum  $n\omega$  bis  $N\omega$  eine Matrix aufgespannt.

Tab.1. Berechnungstabelle für eine Sinus-Fouriertransformation: Die Grundfrequenz sei  $\omega$ .

$t$	$f(t) = f_k$	$n = 1$	$n = 2$	...	$n = N$
$0 = t_0$	$f(0) = f_0$	$f_0 \sin(1 \omega t_0) \Delta t$	$f_0 \sin(2 \omega t_0) \Delta t$	...	$f_0 \sin(N \omega t_0) \Delta t$
$\Delta t = t_1$	$f(\Delta t) = f_1$	$f_1 \sin(1 \omega t_1) \Delta t$	$f_1 \sin(2 \omega t_1) \Delta t$	...	$f_1 \sin(N \omega t_1) \Delta t$
$2\Delta t = t_2$	$f(2\Delta t) = f_2$	$f_2 \sin(1 \omega t_2) \Delta t$	$f_2 \sin(2 \omega t_2) \Delta t$	...	$f_2 \sin(N \omega t_2) \Delta t$
$3\Delta t = t_3$	$f(3\Delta t) = f_3$	$f_3 \sin(1 \omega t_3) \Delta t$	$f_3 \sin(2 \omega t_3) \Delta t$	...	...
$4\Delta t = t_4$	$f(4\Delta t) = f_4$	$f_4 \sin(1 \omega t_4) \Delta t$	$f_4 \sin(2 \omega t_4) \Delta t$	...	...
$5\Delta t = t_5$	$f(5\Delta t) = f_5$	$f_5 \sin(1 \omega t_5) \Delta t$	$f_5 \sin(2 \omega t_5) \Delta t$	...	...
$6\Delta t = t_6$	$f(6\Delta t) = f_6$	$f_6 \sin(1 \omega t_6) \Delta t$	$f_6 \sin(2 \omega t_6) \Delta t$	...	...
...	...	...	...	...	...
$k\Delta t = t_k$	$f(k\Delta t) = f_k$	$f_k \sin(1 \omega t_k) \Delta t$	$f_k \sin(2 \omega t_k) \Delta t$	...	$f_k \sin(N \omega t_k) \Delta t$
...	...	...	...	...	...
$K\Delta t = T$	$f(K\Delta t) = f_K = f(T)$	$f_K \sin(1 \omega T) \Delta t$	$f_K \sin(2 \omega T) \Delta t$	...	$f_K \sin(N \omega T) \Delta t$
		$b_1 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K f_k \sin(1 \omega t_k) \Delta t$	$b_2 = \frac{2}{T} \sum_{k=1}^K f_k \sin(2 \omega t_k) \Delta t$	...	$b_N = \dots$

Die Implementierung der Tabelle erfordert genaues und konzentriertes Arbeiten und ist eine lehrreiche Erfahrung für die Schülerschaft. Das korrekte Funktionieren sollte anhand von Fourierreihen überprüft werden. Dabei kann als zu analysierende Funktion eine Sägezahnfunktion genommen werden. Die Amplituden im resultierenden Spektrum müssen dann dem Gesetz (2) entsprechen.

Tabellenkalkulationsprogramme wie Gnumeric oder Excel verfügen über eine eingebaute FT. Auch gibt es Simulationsprogramme (z.B. Berkeley Madonna), welche eine gut einsetzbare FT bereitstellen. Die Nutzung dieser Werkzeuge ist im Unterricht sinnvoll, aber die vorgängige eigene Programmierung durch Schülerinnen und Schüler ist für das Verständnis sehr hilfreich und deshalb zu empfehlen.

#### Analyse und Darstellung von Daten mittels FT und Histogrammen

Die Einführung der FT macht nur Sinn, wenn diese auch an konkreten Beispielen angewendet werden kann. Eine mögliche Anwendung ergibt sich aus der Fragestellung heraus, wie Zufallszahlen generiert werden können oder wie chaotisches Verhalten charakterisiert werden kann. Für beide Bereiche kann das System des logistischen Wachstums genommen werden. Das logistische Wachstum wird durch die Differentialgleichung  $\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$  beschrieben, wobei die Lösungsfunktion  $N(t)$  die Populationsgrösse beschreibt. Die Lösung kann durch ein einfaches Eulerverfahren numerisch mittels einer Berechnungstabelle angenähert werden. Dabei wird im Prinzip das folgende, rekursive Gesetz verwendet:  $N_{k+1} = N_k + (\alpha - \beta N_k) N_k \cdot \Delta t$ . Für hinreichend kleine Zeitschritte  $\Delta t$  (abhängig von den Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ ) wird die analytische Lösung gut approximiert. Interessant wird das System allerdings, wenn die Schrittweite vergrössert wird. Zuerst werden exponentiell gedämpfte numerische Schwingungen sichtbar [Fai93], dann oszillieren die Stützstellen mit konstanter Amplitude hin und her (Fig.2). Werden noch grössere Zeitschritte genommen, bilden sich zunehmend chaotische Muster aus. In Fig.2 sind die Werte für  $N_k$  gegeben. Daneben sind die Histogramme für die Verteilung der Werte wiedergegeben. Bei einer exponentiell gedämpften numerischen Oszillation tritt der Gleichgewichtswert  $N_{eq} = \alpha / \beta$  am häufigsten auf (in Fig.2 bei den Parameterwerten  $\alpha = 20 \text{ U}^{-1}$  und  $\beta = 2 \text{ U}^{-1}$ ). In die benachbarten Kategorien (Pivots) fallen die sich exponentiell dem Gleichgewichtsniveau nähernden Werte, wobei sich das Bild in Abhängigkeit der Kategorienbildung (Pivotbreite) etwas ändert. Bei Erhöhung der Werte auf  $\alpha = 22 \text{ U}^{-1}$  (U für Zeiteinheit) und  $\beta = 2.2 \text{ U}^{-1}$  verschwindet die exponentielle Dämpfung, entsprechend werden im Histogramm zwei Balken sichtbar, wobei die Werte für  $N(t)$  zwischen zwei Extremen (Grenzen der Oszillation) hin und her pendeln. Bei weiterer Erhöhung von  $\alpha$  und  $\beta$  wird eine Asymmetrie sichtbar, welche den quadratischen Hemmungsterm  $-\beta N^2$  widerspiegelt. Bei  $\alpha = 30 \text{ U}^{-1}$  und  $\beta = 3 \text{ U}^{-1}$  ergibt sich eine breite Verteilung, welche an den Rändern erhöht ist.

Die Aussagekraft von Histogrammen ist allerdings beschränkt. Da die Zeit als Ordnungsparameter im Histogramm nicht verwendet wird, können zeitliche Korrelationen nicht dargestellt werden. Ein Histogramm einer fein abgetasteten Sinusfunktion zum Beispiel zeigt ein ähnliches Muster, wie dies mit wachsendem Wert von  $\alpha$  und  $\beta$  erkennbar wird.

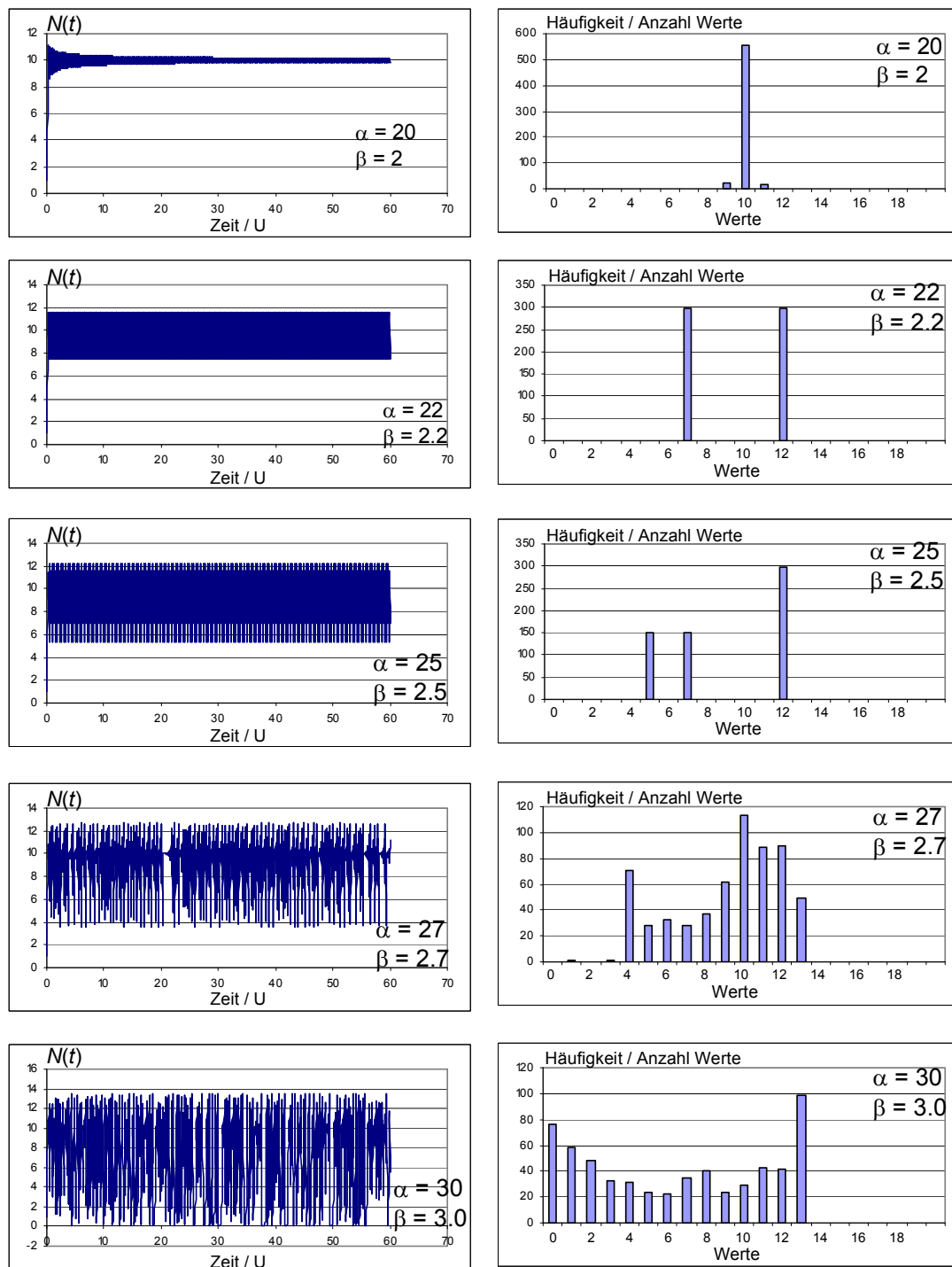


Fig.2. Zeitdiagramm und Histogramm numerischer Oszillationen bei der numerischen Berechnung des logistischen Wachstums: Parameterwerte sind bei den Diagrammen angegeben; Gerechnet mit Euler-Verfahren,  $\Delta t = 0.1$  U.

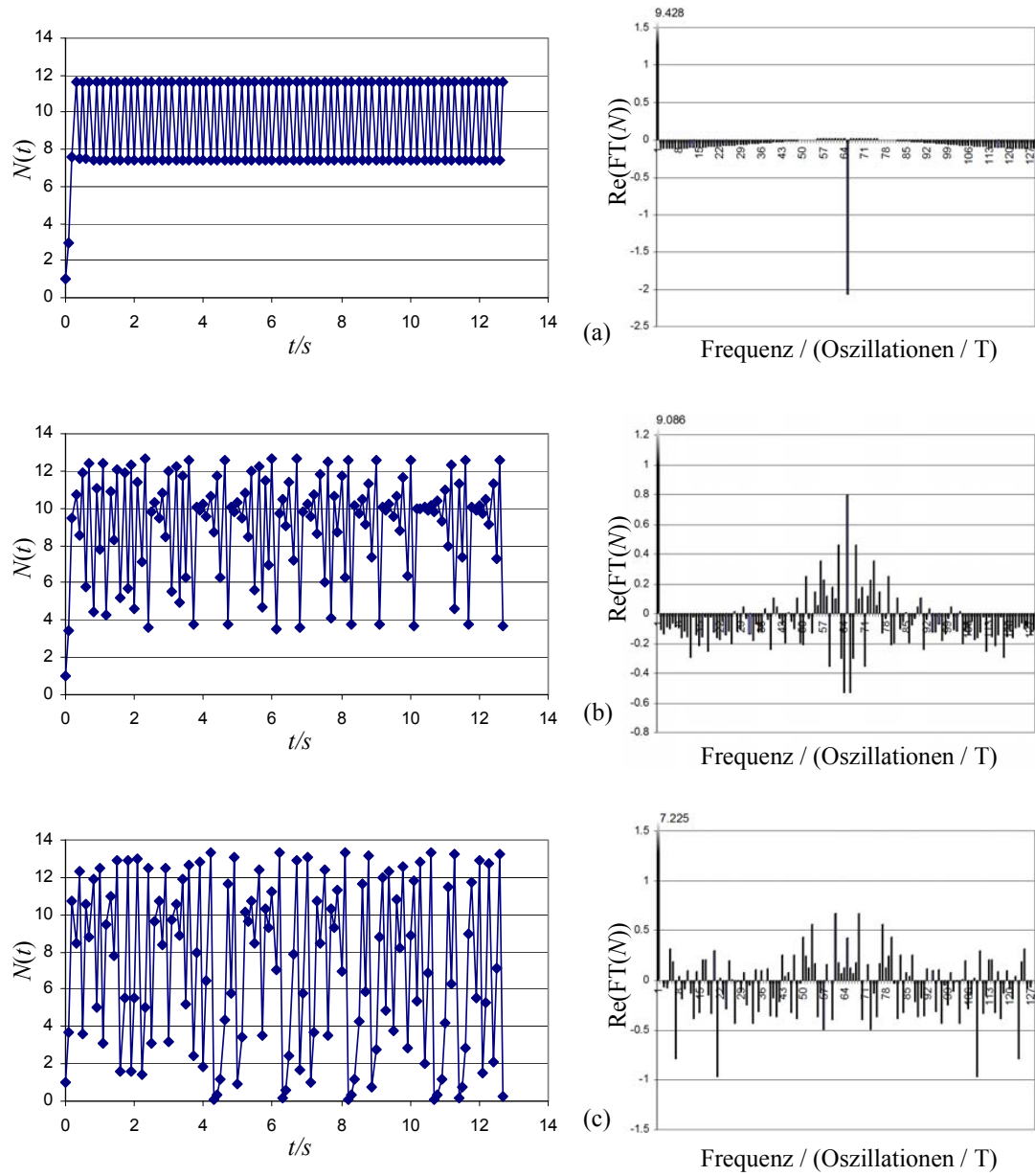


Fig.3. Zeitdiagramme und Realteil der Fouriertransformierten der numerischen Oszillationen beim logistischen Wachstum. Verwendete Parameter: (a)  $\alpha = 2.2 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0.22 \text{ s}^{-1}$ ; (b)  $\alpha = 2.7 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0.27 \text{ s}^{-1}$ ; (c)  $\alpha = 3.0 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta = 0.30 \text{ s}^{-1}$ ;  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ; Die FT erfolgte über 128 Werte (12.7 s), die Frequenz wird als Anzahl Oszillationen pro 128 Werte (=T) angegeben. Es wurde für die numerischen Berechnungen Gnumeric verwendet.

Hier hat die Fouriertransformation einen Vorteil: Ein chaotisches Signal (Rauschen) besitzt ein charakteristisches Spektrum, in welchem alle Frequenzen deutlich vertreten sind (beim weissen Rauschen mit gleichen Amplituden).

In Fig.3 sind die Realteile der Fouriertransformierten von  $N(t)$  (entspricht der cos-FT) für das System des logistischen Wachstums gezeigt. Bei der Frequenz 0 Oszillationen / T entspricht die Amplitude (Zahl oberhalb des Balkens, entspricht dem Term  $a_0$  in Formel (1)) dem arithmetischen Mittel der Werte für  $N(t)$ , welcher mit grösser werdenden Werten von  $\alpha$  und  $\beta$  zunehmend unterhalb von  $N_{eq}$  (=10) liegt (wegen dem quadratische Dämpfungsterm  $-\beta N^2$ ). Bei Fig.3a ist ein deutlicher Ausschlag der Amplitude bei 64 Oszillationen pro 128 Werte zu beobachten, was exakt dem Zeitdiagramm entspricht (ausgenommen der initiale Anstieg). Mit grösser werdenden Werten von  $\alpha$  und  $\beta$  lässt sich im Realteil der Fouriertransformierten erkennen, wie bei immer mehr Frequenzen die Amplituden anwachsen. Die negativen Ausschläge entstehen, weil sich  $N(t)$  nicht rein aus cos-Funktionen zusammensetzt (Bei der Bildung des Betragsquadrates der Fouriertransformierten würden natürlich nur positive Werte auftreten). Der Übergang zum Chaos wird durch eine spektrale Verbreiterung sichtbar. Eine in kleinen Schritten abgetastete periodische Funktion würde hingegen ein diskretes Spektrum zeigen.

#### Diskussion und Ausblick

In diesem Beitrag geht es nicht darum, neue Methoden vorzustellen oder die Mathematik weiter zu entwickeln. Vielmehr werden hier Verfahren gezeigt, welche in dieser Form im Schwerpunktfach Physik und Anwendungen der Mathematik, sowie im Ergänzungsfach Anwendungen der Mathematik umgesetzt wurden. Auch wenn eine mathematisch umfassende Behandlung des Themas ausserhalb der Reichweite des Mittelschulunterrichts liegt, kann doch die FT als Methode zur Exploration von Daten eingesetzt werden. Dabei kann diese Exploration als kreativer Prozess gesehen werden, bei dem Schülerinnen und Schüler verschiedene mathematische Verfahren ausprobieren und daraus Aussagen über Daten oder sogar über ein System ableiten. Insbesondere chaotische Systeme werden so einer Charakterisierung zugänglich. Auch lässt sich mit Histogrammen und FT die Güte eines Zufallsgenerators beurteilen.

#### Literatur

- [Buz04] Buzug, T. M.: Einführung in die Computertomographie – mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion. Springer, Berlin, 2004.
- [Fai93] Faires, J. D., Burden, R. L. : Numerical Methods. PWS – Publishing Company, Boston, 1993.
- [Sbl98] Schneebeli, H.R., Vollmer, H.R.: Skalarprodukte – Schwingungen – Signale. Sabe Zürich, 1998. online unter [www.swisseduc.ch/mathematik/Schwingungen](http://www.swisseduc.ch/mathematik/Schwingungen)