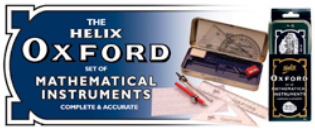
Ein Theorem von Apollonius

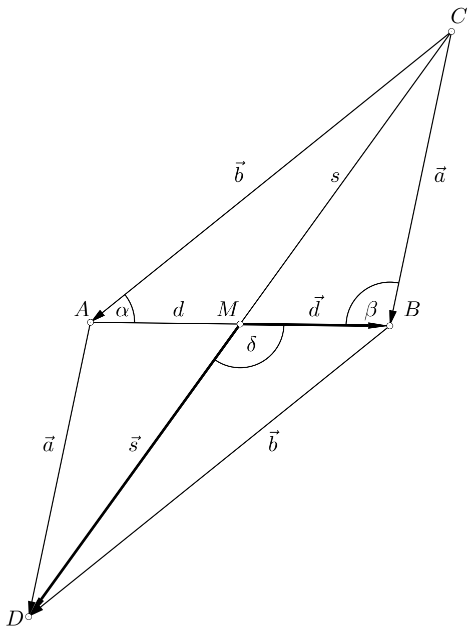
Peter Gallin, Universität Zürich



In einer alten Blechschachtel, die mir die Mathematiklehrerin M. Distel vom Hegau-Gymnasium in Singen gezeigt hat, können Schülerinnen und Schüler sogenannte „MATHEMATICAL INSTRUMENTS“ aufbewahren. Auf der Innenseite des Deckels findet sich — gleichsam als Spick für alle Notfälle — neben dem Wortlaut des Satzes von Pythagoras ein „Apollonius’ Theorem“:

In any triangle the sum of the square on two sides is equal to twice the square on half of the third together with twice the square on the median which bisects the third side.
(Quelle: *The Oxford set of mathematical instruments - complete and accurate* by Helix)

Bei der Suche im Internet unter dem Stichwort „Apollonius’ Theorem“ erscheint in englischen Beiträgen tatsächlich ein offenbar allgemein bekannter Satz, der aber im deutschen Sprachraum kaum unter diesem Namen bekannt sein dürfte. Dabei handelt es sich schlicht und einfach um die Formel für die Berechnung der Länge einer Seitenhalbierenden s (Schwerlinie) im allgemeinen Dreieck ABC.



Beim Beweis des Satzes gehen wir auf dem 1. Weg direkt mit Trigonometrie vor. Auf dem 2. Weg setzen wir noch etwas Vektorrechnung ein. Dazu spiegeln wir zunächst das Dreieck ABC am Mittelpunkt M der Seite AB und erhalten so das Parallelogramm $ADBC$ mit den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$. (Grundsätzlich sollen hier Buchstaben ohne Pfeil die Länge des entsprechenden Vektors bedeuten, der durch den gleichen Buchstaben mit Pfeil bezeichnet ist.)

1. Weg: Wir drücken die Länge s der Seitenhalbierenden durch C mit Hilfe des Cosinussatzes in den Dreiecken AMC und BMC auf zwei verschiedene Arten aus (hier bedeutet d die Hälfte der Gegenseite von C: $d = c/2 = |AB|/2$):

$$s^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\alpha$$

$$s^2 = d^2 + a^2 - 2da\cos\beta$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt:

$$2s^2 = 2d^2 + a^2 + b^2 - 2d(b\cos\alpha + a\cos\beta)$$

Die Klammer ist aber gerade die Länge der Seite $c = 2d$, woraus das „Apollonius’ Theorem“ folgt: $2s^2 = a^2 + b^2 - 2d^2$ oder $2(s^2 + d^2) = a^2 + b^2$.

2. Weg: Erst mit der Denkweise der Vektorrechung fällt auf, dass d und s sehr ähnlich konstruiert sind: $2\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ und $2\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$. So ist es naheliegend, diese beiden Vektoren ins Skalarprodukt zu setzen: $2\vec{s} \cdot 2\vec{d} = 4\vec{s} \cdot \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - b^2$. Andererseits erhält man über den Cosinussatz im Dreieck MDB: $2\vec{s} \cdot \vec{d} = 2sd\cos\delta = s^2 + d^2 - b^2$. Insgesamt folgt also $a^2 - b^2 = 2(s^2 + d^2 - b^2)$. Daraus ergibt sich sofort das auf dem 1. Weg erhaltene „Apollonius’ Theorem“:

$$2(s^2 + d^2) = a^2 + b^2$$

Folgerung: Für die Länge s der Seitenhalbierenden durch C im Dreieck ABC erhalten wir mit $c = 2d$:

$$s = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$