

Bericht zur Maturaarbeit Billard - Reflexionen

Norbert Hungerbühler, Universität Fribourg

Vorbemerkung

Die hier besprochene Maturaarbeit kam unter einer Patenschaft zustande. Die Schülerin wurde dabei gemeinsam von ihrem Lehrer, Anton Perren (Kollegium Spiritus Sanctus in Brig), und mir betreut. Patenschaften zwischen Schulen und Universitäten sind sehr einfach über den Patenschaftsservice der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft zu installieren:

www.math.ch/mathematics-at-school

Solche Patenschaften werden ebenfalls von der Schweizerischen Akademie der Naturwissenschaften vermittelt und zwar auch in anderen Fächern, insbesondere in der Physik:

www.scnat.ch/d/Fokus_Jugend

Problemstellung

Die Problemstellung wurde zu Beginn der Arbeit bewusst offen gehalten, um das Leistungsniveau und die Interessen der Schülerin auszuloten. Angefangen wurde mit einem einfachen Billardproblem im Quadrat: Eine Kugel soll so gestossen werden, dass sie die vier Banden je genau einmal berührt und dann zum Ausgangspunkt zurückkehrt. In welcher Reihenfolge werden die Banden berührt? Wieviele Lösungen gibt es?

Anschliessend wurde ein dreieckiger Billardtisch untersucht: Ist das Dreieck spitzwinklig, so ist das Höhenfusspunktdreieck eine geschlossene Billardbahn (siehe [4], [2]). Aber gibt es auch geschlossene Bahnen in stumpfwinkligen Dreiecken?

Danach betrachtete die Schülerin das Heronsche Prinzip (Licht läuft immer entlang kürzester¹ Bahnen) und leitete daraus die drei Euklidischen Reflexionsgesetze her (z.B. Einfallswinkel = Ausfallswinkel).

Im letzten Teil leitete die Schülerin aus dem Heronschen Prinzip einen Beweis einer Variante des Satzes von Birkhoff (siehe [3]) ab: Einer geschlossenen Raumkurve ist eine geschlossene Billardbahn einzubeschreiben. Ziel war dabei auch eine numerische Implementierung mit graphischer Ausgabe.

¹genauer sind es Bahnen stationärer Länge

Ergebnisse und Erfahrungen

Das Billardproblem im Quadrat konnte von der Schülerin recht selbständig erarbeitet werden. Den Beweis der angesprochenen Eigenschaft des Höhenfusspunktdreiecks rekonstruierte die Schülerin auf der Grundlage von vorgegebenen Hilfsfiguren. Für das stumpfwinklige Dreieck studierte die Schülerin einen aktuellen Artikel aus den *SIAM Reviews* (siehe [3]). Der Zusammenhang zwischen den Euklidischen Reflexionsgesetzen und dem Heronschen Prinzip stellte für die Schülerin anfänglich eine beträchtliche Hürde dar, da ein variationeller Zugang zu Problemen normalerweise ausserhalb der Schulmathematik liegt. Nach anfänglicher Mühe ging jedoch ein Ruck durch die Schülerin und schliesslich freute sie sich so über die Grundidee, dass sie aus eigenem Antrieb noch das Birkhoff-Problem gestellt haben wollte. Der Beweis gelang schliesslich unter Anleitung, ebenso die numerische Implementierung. Die Schülerin war schlussendlich zurecht stolz auf ihre Leistung und ihren Erkenntnisgewinn.

Bemerkungen

Billardprobleme eignen sich sehr gut für eine Maturaarbeit: Es gibt beliebig viele Varianten und unterschiedliche Fragestellungen auf allen Niveaus (siehe Literaturhinweise). Aufbauend auf einfachen Problemen kann man je nach Situation zu zu schwierigeren oder komplexeren Problemen übergehen. Ein weiterer Vorteil ist die Anschaulichkeit der Probleme. Bei numerischen Implementierungen ist eine gewisse Vorsicht am Platz: Längst nicht alle Maturanden bringen Programmierkenntnisse oder Freude am Arbeiten mit Computern mit.

Für weitere Informationen oder Auskünfte stehe ich jederzeit gern zur Verfügung.

Literaturhinweise

- [1] Marco Bettinaglio, Ferdinando Lehmann: Mathematisches Billard. Educ-ETH, Grüne Berichte 1998
<http://www.educ.ethz.ch/lehrpersonen/mathematik/gb/ber>
- [2] Richard Courant, Herbert Robbins: What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. Oxford Paperbacks, 2nd edition, 2007
- [3] Lorenz Halbeisen, Norbert Hungerbühler: On periodic billiard trajectories in obtuse triangles. *SIAM Rev.* 42/4, 657–670, 2000
- [4] Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba: Kugel, Kreis und Seifenblasen - Optimale Formen in Geometrie und Natur. Birkhäuser 1996, 2001
- [5] Norbert Hungerbühler: Geometrical Aspects of the Circular Billiard Problem. *Elemente der Mathematik*, 47, 114–117, 1992
- [6] George W. Tokarsky: Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point. *Amer. Math. Monthly* 102, 867–879, 1995

norbert.hungerbuehler@unifr.ch