Un peu d'algèbre linéaire et d'analyse combinatoire

Jean Piquerez
Collège et École de Commerce Madame de Staël

Dans le livre de Sheldon Ross « Initiation aux probabilités » aux Presses polytechniques et universitaires romandes, édition 2002, on peut lire en page 15 l'énoncé suivant :

Vérifier que, pour $n \geq 4$, $\binom{n+1}{4} = \frac{1}{3}\binom{\binom{n}{2}}{2}$.

Présenter ensuite un argument d'analyse combinatoire en faveur de cette équation.

On vérifie sans peine que

$$\frac{1}{3}\binom{\binom{n}{2}}{2} = \frac{1}{3}\binom{\frac{n(n-1)}{2}}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left[\frac{n(n-1)}{2}-1\right]}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \binom{n+1}{4}.$$

D'une part, $\binom{n+1}{4}$ est le nombre de sous-ensembles de taille 4 d'un ensemble à $(n+1)$ éléments noté E'. Imaginons ensuite un élément noté a de cet ensemble et notons $x_1, x_2, .., x_n$ les n autres. Soit $E = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$; par conséquent $E' = E \cup \{a\}$.

D'autre part, $\binom{n}{2}$ est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments de E. Notons $\mathrm{P}_2(E)$, l'ensemble de ces sous-ensembles. Alors $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ est le nombre de sous-ensembles à 2 éléments de $\mathrm{P}_2(E)$.

Montrons qu'il correspond au nombre de sous-ensembles de taille 4 de E', en distinguant ceux qui contiennent a de ceux qui ne le contiennent pas.

En effet, $\{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ provient de la réunion disjointe de deux sous-ensembles de taille 2 d'un ensemble à n éléments de 3 façons distinctes :

$\{x_1; x_2\} \cup \{x_3; x_4\} = \{x_1; x_3\} \cup \{x_2; x_4\} = \{x_1; x_4\} \cup \{x_2; x_3\}$

Les sous- ensembles du type $\{x_1; x_2; x_3; a\}$ quant à eux, se construisent aussi de 3 façons distinctes par l'adjonction de a à $\{x_1; x_2; x_3\}$ car

$\{x_1; x_2; x_3\} = \{x_1; x_2\} \cup \{x_1; x_3\} = \{x_1; x_2\} \cup \{x_2; x_3\} = \{x_1; x_3\} \cup \{x_2; x_3\}$.

Donc, $\binom{\binom{n}{2}}{2}$ compte trois fois les sous-ensembles de taille 4 de E', ce qui termine la démonstration.

Remarque : Le raisonnement précédent n'est pas généralisable à l'exercice qui va suivre.

Quelques années plus tard, je tombe sur l'exercice suivant :

Exprimer $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\ k \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire de certains $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$

Vu son libellé, je l'ai d'abord traité sous l'angle de l'algèbre linéaire. Puis l'exercice du Sheldon Ross me revenant en mémoire, j'ai décidé de l'aborder par l'analyse combinatoire. Voici le fruit de mes réflexions.

a) par l'algèbre linéaire

Remarquons tout d'abord que $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ est un polynôme en n de degré m ; il est de l'ordre de n^m.

Donc $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\ k \end{pmatrix}$ est un polynôme en n de degré mk, car il est de l'ordre de $(n^m)^k = n^{mk}$. Ainsi, il peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq mk$ dont la dimension est $mk + 1$ et dont la base canonique est $\left[1; n; n^2; :::; n^{mk}\right]$.

D'une manière générale envisageons l'espace vectoriel $\mathbf{P_k}$ des polynômes en n de degré k de base canonique $\left[1; n; n^2; :::; n^k\right]$ et montrons que la famille $\left\{ \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \mid i = 0,1,2,...,k \right\}$ en constitue également une base. Or, $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = 1$, $\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$, $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, $\begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$, et, d'une façon générale, $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j n^j$ où $\alpha_i = \frac{1}{i!}$, d'où la matrice suivante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & . & & & \\ 0 & 0 & 1/2 & . & & & \\ . & . & 0 & . & . & . & . \\ & & & & 1/i! & & \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/k! \end{vmatrix}$$

dans la base canonique qui est triangulaire et dont le déterminant est le produit des termes diagonaux $\prod_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}$ et est, par conséquent, non nul.

Ainsi, $\left\{ \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \mid i = 0,1,2,...,k \right\}$ est une base de $\langle \mathrm{Pk}; +; \cdot \rangle$.

Par conséquent, $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} \\ k \end{pmatrix}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire des $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix}$, i allant de 0 à mk.

Envisageons des exemples numériques et donnons leur une interprétation combinatoire.

b) par l'analyse combinatoire

$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4} = 3\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$ au vu de l'exercice précédent.

$\binom{\binom{n}{2}}{3}$ dénombre les sous-ensembles d'au plus 6 éléments d'un ensemble de n éléments $(n \geq 6)$, constitués par la réunion de 3 sous-ensembles à 2 éléments. On obtient ainsi :
$\{a;b;c;d;e;f\} = \{a;b\} \cup \{c;d\} \cup \{e;f\}$, par exemple, qui peut s'obtenir de 15 façons distinctes,
$\{a;b;c;d;e\} = \{a;b\} \cup \{a;c\} \cup \{d;e\}$, par exemple, qui peut s'obtenir de 30 façons distinctes,
$\{a;b;c;d\} = \begin{cases} \{a;b\} \cup \{a;c\} \cup \{b;d\} & \text{12 possibilités} \\ \{a;b\} \cup \{a;c\} \cup \{a;d\} & \text{4 possibilités} \end{cases}$, et enfin
$\{a;b;c\} = \{a;b\} \cup \{b;c\} \cup \{a;c\}$ qui s'obtient d'une seule façon.

On a donc $\binom{\binom{n}{2}}{3} = 15\binom{n}{6} + 30\binom{n}{5} + 16\binom{n}{4} + \binom{n}{3}$.

Bien entendu, $\binom{\binom{n}{2}}{3} \neq \binom{\binom{n}{3}}{2}$; d'ailleurs, par un raisonnement similaire, on trouve :

$\binom{\binom{n}{3}}{2} = 10\binom{n}{6} + 15\binom{n}{5} + 6\binom{n}{4}$

Au vu des exemples précédents, on remarque donc que $\binom{\binom{n}{m}}{k}$ compte plusieurs fois des sous-ensembles d'au plus mk éléments constitués par la réunion de k sous-ensembles à m éléments. On a alors une combinaison linéaire des $\binom{n}{i}$ allant de $\binom{n}{m+p}$ à $\binom{n}{km}$, p étant déterminé par le plus petit entier pour lequel on a $\binom{m+p}{m} \geq k$.

Donc, si $m = 2$ et $k = 3$, $\binom{2+p}{2} \geq 3$ à partir de $p = 1$ et la combinaison linéaire va de $\binom{n}{3}$ à $\binom{n}{6}$.

Si $m = 3$ et $k = 2$, $\binom{3+p}{2} \geq 2$ à partir de $p = 1$ aussi et la combinaison linéaire va de $\binom{n}{4}$ à $\binom{n}{6}$.