Wie stark ist das System?
- Zwei Betrachtungen zur Trisektion des Winkels

Armin P. Barth

Wenigstens teilweise ist die Mathematik mit dem Lösen von Schachproblemen vergleichbar: Eine erlaubte, konsistente Grundstellung soll aufgrund eines entscheidbaren Satzes von Spielregeln in eine klar definierte Endstellung übergeführt werden. Betrachten wir als Beispiel ein simples Wortproblem: Ein *Wort* sei eine endliche Kette von Buchstaben aus der Menge $\{A, B, C, D, E\}$, und *ABCDE* sei die Grundstellung. Als Spielregeln erlauben wir alle Schritte, bei denen zwei unmittelbar nebeneinander stehende Buchstaben eines Wortes vertauscht werden und das Wort sonst aber keine Änderung erfährt. So wäre also etwa *CADEB* → *CDAEB* ein gemäss Spielregeln erlaubter Schritt, weil der Wortteil *AD* eine Vertauschung erfahren hat. Kann die Endstellung *EDCBA* aus der Grundstellung erreicht werden? Und kann die Endstellung *ACEBC* erreicht werden?

Grundsätzlich stellt sich bei solchen Problemen die Frage, ob die Spielregeln stark genug sind, damit all das erreicht werden kann, was in einem gewissen Sinne wünschenswert ist. In unserem kleinen Wortproblem etwa ist es natürlich leicht möglich, durch ein paar regelkonforme Vertauschungen die Endstellung *EDCBA* zu erreichen, aber es ist grundsätzlich unmöglich, die Endposition *ACEBC* zu generieren, weil sie zwei Buchstaben *C* enthält, während in der Grundstellung bloss einer vorkommt, und weil die Anzahl Vorkommen eines Buchstabens in diesem System eine Invariante ist.

Die Spielregeln statten das System mit einem gewissen Mass an „Stärke“ aus, und es ist für jedes regelbasierte System – für das kleine Wortproblem ebenso wie für jede streng formalisierte Disziplin der Mathematik – interessant zu ergründen, wie stark es genau ist, wozu es in der Lage ist, und es mindestens genauso interessant zu erforschen, wozu es nicht in der Lage ist.

Ein exzellentes Beispiel hierfür bietet die Dreiteilung des Winkels. Das ist an sich eine banale Sache, doch je nachdem, wie stark die Spielregeln sind, mit denen man das System ausstattet, kann es ein schwieriges oder gar unmögliches Unterfangen sein. Wir stellen im Folgenden zwei Systeme einander gegenüber, das sehr bekannte System der Konstruktion mit Zirkel und Lineal, das nicht mächtig genug ist, um die Trisektion eines beliebigen Winkels zu ermöglichen, und das sicher weniger bekannte System der *Origami-Konstruktion*, in dem die Aufgabe überraschenderweise leicht lösbar ist. Wenn diese Ausführungen einen Wert für die Schule haben sollen, dann vielleicht den, Schülerinnen und Schülern in aller Deutlichkeit vor Augen führen, dass jegliches mathematische Arbeiten innerhalb eines genau abgesteckten Systems (von Definitionen, Axiomen, Regeln und Methoden) stattfindet, dass alle innerhalb des Systems erarbeiteten Erkenntnisse immer relativ zur Ausstattung des Systems gesehen werden müssen und dass die im System zugelassenen Mittel natürlich dessen Wirkungsbereich und somit auch die Menge an möglichen Erkenntnissen begrenzen.

Warum sind Zirkel und Lineal nicht stark genug?

Das Problem der Trisektion eines Winkels geht auf die antiken Griechen zurück und entstand etwa zeitgleich mit zwei anderen berühmten Problemen: der Quadratur des Kreises und dem Delischen Problem[1]. Die Spielregeln, die die Griechen zur Lösung dieser Probleme zuliessen, sind schnell aufgezählt: Es sind die folgenden (auf einer gegebenen Einheitsstrecke aufbauenden) Konstruktionen mit Zirkel und Lineal:

- Verbinden zweier schon konstruierter Punkte mittels Lineal (und allfällige Verlängerung der Strecke auf beiden Seiten).
- Einen Kreis zeichnen um einen schon konstruierten Punkt als Mittelpunkt mit einem Radius, der durch den Abstand zweier schon konstruierter Punkte bestimmt ist und so in den Zirkel genommen werden kann.
- Konstruktion neuer Punkte als Schnittpunkte von Strecken, Geraden und Kreisen.

[1] Nach einer Legende soll um 430 v. Chr. auf der griechischen Insel Delos die Pest gewütet haben. Das Orakel versprach den Ratsuchenden Abhilfe durch Verdoppelung des (Inhaltes des) würfelförmigen Altars im Tempel des Apoll.

Berechnungen oder der Einsatz eines Massstabes sind in diesem System jedoch untersagt. Allein mit den beschriebenen Mitteln sollten also die erwähnten Probleme gelöst werden. Ist es verwunderlich, dass sich bezüglich der Möglichkeiten eines Systems Beeinträchtigungen ergeben, wenn man seine Mittel stark einschränkt? Eigentlich nicht. Es wundert sich ja auch niemand darüber, dass man mit einer Waschmaschine nicht backen kann. Wenn also als erlaubte Spielregeln ausschliesslich die oben beschriebenen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal zur Verfügung stehen, was für Aufgaben können dann gelöst werden? Es ist ziemlich leicht einzusehen, dass – aufbauend auf einer Strecke der Länge 1 – zu jeder rationalen Zahl eine Strecke entsprechender Länge konstruiert werden kann. Zudem lassen sich Quadratwurzeln konstruieren. In seinem Werk „Theorie der geometrischen Konstruktionen" (1952) hat Ludwig Bieberbach diese Frage endgültig geklärt, indem er den folgenden Satz bewies:

Satz:

> Mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind alle und nur die Punkte, deren Koordinaten in einem gegebenen oder konstruierten rechtwinkligen Koordinatensystem sich durch Quadratwurzelausdrücke aus den Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen lassen, das heisst aus ihnen durch die vier Grundrechnungsarten und den Prozess des Quadratwurzelziehens bei endlich oftmaliger Verwendung dieser Operationen gewonnen werden können.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal vermögen also quadratische Gleichungen zu lösen. Um die Trisektion eines beliebigen Winkels zu schaffen, sind die Möglichkeiten dieses Systems allerdings zu eingeschränkt. Obwohl der dritte Teil bestimmter Winkel (etwa 90° oder 135° usw.) leicht konstruktiv hergestellt werden kann, ist es unmöglich, mit den erlaubten Methoden jeden vorliegenden Winkel zu teilen. Pierre Laurent Wantzel hat 1837 bewiesen, dass es keine Zirkel-und-Lineal – Konstruktion geben kann, die jeden beliebigen Winkel exakt dreiteilt. Die Grundidee eines Beweises sei hier kurz in Erinnerung gerufen:

- Kann man den Cosinus eines Winkels konstruieren, so auch den Winkel selbst, wie man leicht am Einheitskreis erkennt. Wir stellen uns also die Frage, ob es möglich ist, eine Strecke der Länge $\cos(\alpha/3)$ zu konstruieren, wenn α ein gegebener Winkel ist.
- Eine trigonometrische Formel für dreifache Winkel lautet:

  $$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)\,.$$

  Ersetzen wir x durch $\alpha/3$, so erhalten wir

  $$\cos(\alpha) = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)\,.$$

- Die Zahl $\cos(\alpha/3)$ ist also Lösung der kubischen Gleichung

  $$4u^3 - 3u = a$$

  in der Variablen u.
- Man kann nachweisen, dass eine Lösungsformel für diese Gleichung, die für alle Werte von a gelten soll, nicht ohne eine dritte Wurzel auskommen kann.
- Mit Zirkel und Lineal kann man aber keine dritten Wurzeln konstruieren, sondern nur zweite, vierte, usw. Daher ist eine Konstruktion, die jeden beliebigen Winkel dreiteilt, unmöglich.

Insbesondere ist etwa der Winkel 60° nicht konstruktiv dreiteilbar, so dass also das reguläre 9-Eck nicht konstruiert werden kann. Und das ist bei weitem keine Ausnahme, hat Bieberbach doch bewiesen, dass die Menge der dreiteilbaren Winkel abzählbar ist und die Menge der nicht-dreiteilbaren folglich überabzählbar.

Mit Kranichen gegen Leukämie

Wie eingangs bemerkt, entscheiden die Mittel, mit denen man ein System ausstattet, über seine Stärke. Es ist also nicht verwunderlich, dass die Winkeldreiteilung in einem ganz anderen System, das mit anderen Mitteln ausgestattet ist, geschafft werden kann.

Origami ist ein solches System. Die japanische Papierfaltkunst hat eine über 2000 Jahre dauernde Geschichte. Sie hat sich schon vor der Erfindung des Papiers anhand anderer Materialien entwickelt, und lange Zeit war sie (wohl aufgrund des teuren Papiers) nur für zeremonielle Zwecke ausgeführt worden. Beginnend mit einem meist quadratischen Bogen Papier entstehen bei Origami ohne Verwendung von Schere und Klebstoff erstaunliche Kunstwerke wie etwa der traditionelle Kranich.

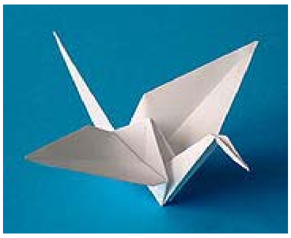


Abb. 1 Ein Origami-Kranich

Wer 1000 Kraniche faltet, soll nach der Legende bei den Göttern einen Wunsch frei haben. Sadako Sasaki, ein an Leukämie erkranktes Strahlenopfer der Atombombe, musste leider erfahren, dass das bloss eine Legende ist: Sie verstarb trotz massenhaften Faltens von Kranichen, und seither sind Kraniche ein Symbol des Widerstandes gegen Atomkriege. Will man zeigen, dass Origami als System stark genug ist, um einen beliebigen Winkel dreiteilen zu können, muss man erst die im System erlaubten Mittel präzisieren. Konstruktionen bei Origami umfassen grob gesagt alle Konstruktionsschritte, die, beginnend mit den Randstrecken und Eckpunkten oder weiteren auf dem Papier vorgegebenen Punkten und Geraden, durch Anbringen von Faltkanten und Erzeugen weiterer Punkte geleistet werden können. Humiaki Huzita und Koshiro Hatori[2] haben hierfür ein System von Axiomen aufgestellt:

1. Zu zwei Punkten gibt es eine Faltkante, die die beiden Punkte verbindet.
2. Zu zwei Punkten gibt es eine Faltkante, die den einen auf den anderen Punkt faltet.
3. Zu zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die die eine auf die andere faltet.
4. Zu einem Punkt und einer Geraden gibt es eine Faltkante, die senkrecht zur Geraden und durch den Punkt verläuft.
5. Zu zwei Punkten und einer Geraden gibt es eine Faltkante, die den ersten Punkt auf die Gerade faltet und durch den zweiten Punkt führt.
6. Zu zwei Punkten und zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die den ersten Punkt auf die erste Gerade und den zweiten Punkt auf die zweite Gerade faltet.
7. Zu einem Punkt und zwei Geraden gibt es eine Faltkante, die den Punkt auf die erste Gerade faltet und die senkrecht zur zweiten Geraden ist.

George Martin hat sogar bewiesen, dass ein einziges Axiom ausreicht, um das System Origami formal zu beschreiben[3]. Nun, da die Spielregeln bekannt sind, kann man sich fragen, wozu dieses System in der Lage ist. Überraschenderweise ist es in einem gewissen Sinne stärker als das System der Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, denn einige der hier beschriebenen Konstruktionsschritte sind mit Zirkel und Lineal nicht ausführbar. Diese grössere Stärke manifestiert sich zum Beispiel darin, dass Origamifaltungen in der Lage sind, die Trisektion des Winkels zu leisten.

Den dritten Teil eines Winkels falten

Die folgende Abbildung zeigt, wie ein auf einem quadratischen Bogen Papier gegebener Winkel in drei gleiche Teile gefaltet werden kann:

1. Bringe den zu teilenden Winkel an.
2. Bringe irgendwo eine horizontale Faltkante AB an. Öffne das Papier danach wieder.
3. Falte die Grundseite auf AB, wodurch die neue Faltkante CD (auf halber Höhe) entsteht. Öffne wieder.
4. Lass die Faltkante *s* dadurch entstehen, dass E auf CD und gleichzeitig A auf den Winkelschenkel gefaltet wird. Danach nicht entfalten!
5. Bringe diejenige Faltkante an, die die schon existierende und in C endende Kante zu F verlängert.
6. Entfalte nun alles und verlängere die im 5. Schritt erzeugte Faltkante bis zur Ecke E.
7. Falte nun die Grundseite EG auf die Gerade EF. Diese letzte Faltkante zusammen mit der Faltkante EF dritteln den gegebenen Winkel.

[2] H. Huzita, „Understanding Geometry through Origami Axioms", in: J. Smith e.a.: Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91), 1992, British Origami Society
[3] G. E. Martin, „Geometric Constructions", Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1997

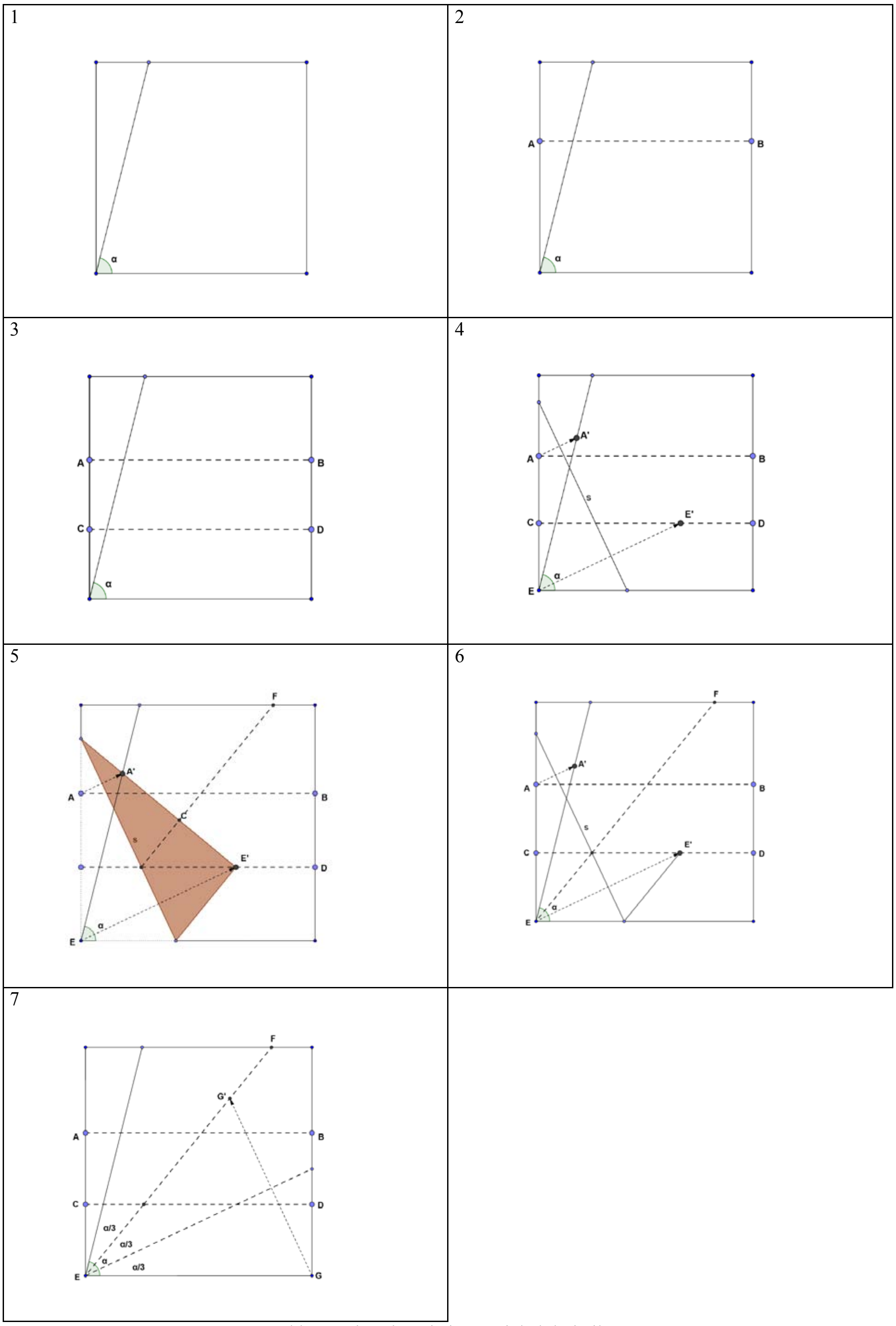
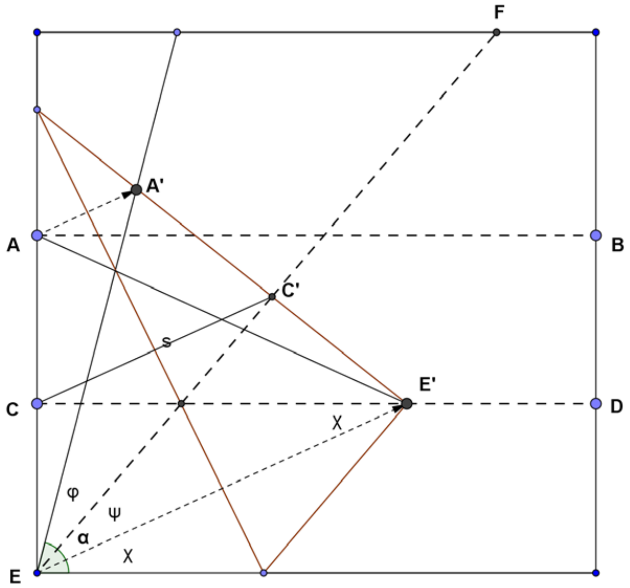


Abb. 2 Mit Origami einen Winkel dreiteilen

Warum entsteht dadurch eine exakte Winkeldreiteilung? Dazu müssen wir nachweisen, dass $\varphi = \psi = \chi$ ist:



Nun, offenbar ist das Dreieck AEE' gleichschenklig mit $\overline{E'A} = \overline{E'E}$, da E'C eine Höhe in diesem Dreieck ist und überdies $\overline{AC} = \overline{CE}$ gilt. Da das Dreieck A'E'E aus dem Dreieck AEE' durch Spiegelung an der Faltkante *s* hervorgeht, ist auch das Dreieck A'E'E gleichschenklig mit $\overline{EA'} = \overline{EE'}$. Zudem ist aus demselben Grund EC' eine Höhe in diesem Dreieck, und sie teilt A'E' hälftig. Daher gilt $\varphi = \psi$. Dass überdies $\psi = \chi$ gilt, folgt unmittelbar aus dem letzten Konstruktionsschritt. Daher ist $\varphi = \psi = \chi$.

□

Origami kann jede kubische Gleichung lösen

Was macht das System Origami so stark, dass es ein Problem lösen kann, das mit klassischen Zirkel-und-Lineal–Konstruktionen nicht gelöst werden kann? Nun, der Hauptunterschied besteht wohl darin, dass das letztgenannte System Quadratwurzelausdrücke im Sinne Bieberbachs erzeugt und somit quadratische Gleichungen lösen kann, während Origami in der Lage ist, kubische Gleichungen zu lösen. Das versetzt Origami in die Lage, die Winkeldreiteilung und übrigens auch das Delische Problem zu lösen[4]. Wir wollen hier zeigen, dass zu jeder kubischen Gleichung der Art $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eine Lösung „erfaltet" werden kann.

Hier ist der Falt-Algorithmus:

Eine Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ falten:
1. Markiere auf dem Bogen Papier die Punkte $P_1 = (a/1)$ und $P_2 = (c/b)$. 2. Bringe die Faltkanten $L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = -c$ an. 3. Sei $y = tx + u$ die (nach den Axiomen von Huzito-Hatori existierende) Faltkante, die P_1 auf L_1 und gleichzeitig P_2 auf L_2 faltet. Bringe diese Faltkante an. 4. Dann ist *t* Lösung der obigen kubischen Gleichung.

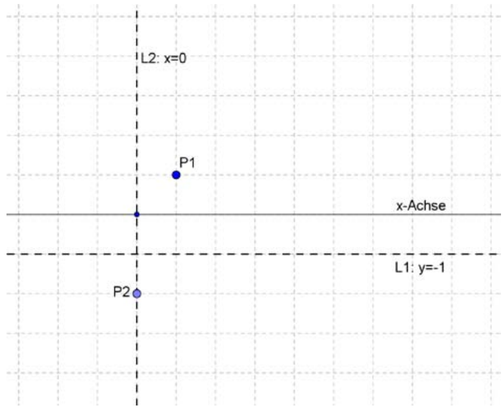
[4] Da Origami jede kubische Gleichung lösen kann, kann insbesondere die Gleichung $x^3 - 2 = 0$ gelöst werden, und genau das muss ja geschehen, damit das Volumen eines Würfels verdoppelt wird.

Wir wollen das zuerst an einigen Beispielen überprüfen:

a) Die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x = 0$ lösen.

Hier ist $a = 1, b = -2, c = 0$, also $P_1 = (1/1)$, $P_2 = (0/-2)$, $L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = 0$.

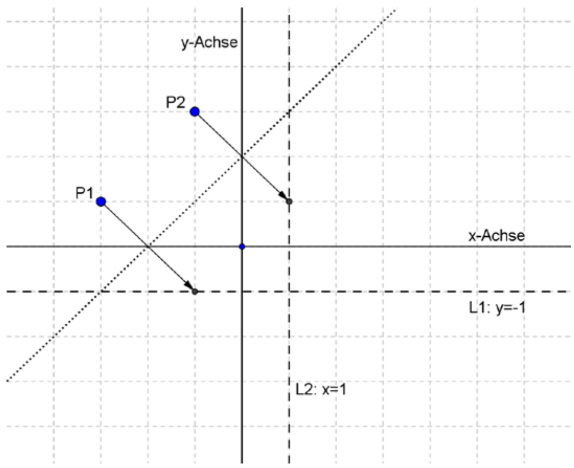
Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die x-Achse mit Steigung t=0. Folglich ist 0 eine Lösung der Gleichung – und das stimmt ja auch.



b) Die Gleichung $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0$ lösen.

Hier ist $a = -3, b = 3, c = -1$, also $P_1 = (-3/1)$, $P_2 = (-1/3)$, $L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = 1$.

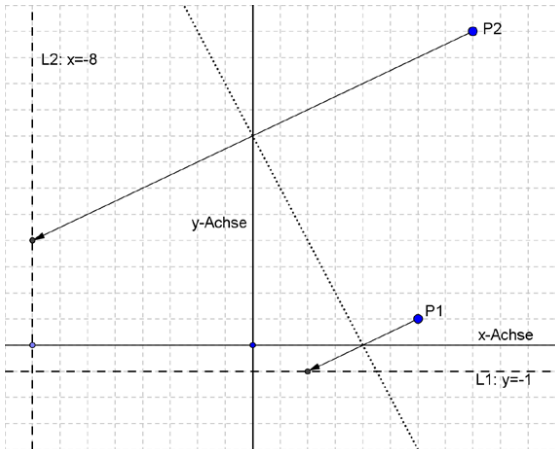
Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die Gerade $y = x + 2$ mit Steigung t=1. Folglich ist 1 eine Lösung der Gleichung –und das stimmt ja auch.



c) Die Gleichung $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 0$ lösen.

Hier ist $a = 6, b = 12, c = 8$, also $P_1 = (6/1)$, $P_2 = (8/12)$, $L_1 : y = -1$ und $L_2 : x = -8$.

Die Faltkante, die P_1 auf L_1 und P_2 auf L_2 faltet, ist die Gerade $y = -2x + 8$ mit Steigung $t = -2$. Folglich ist –2 eine Lösung der Gleichung – und das stimmt ja auch.

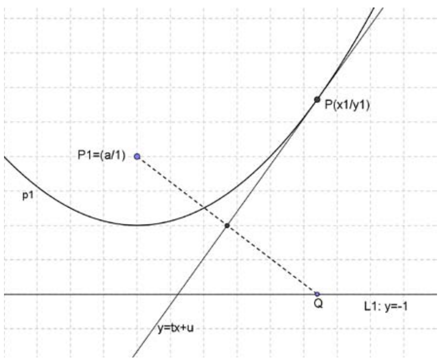


Es bleibt nachzuweisen, dass dieser Faltalgorithmus zwingend zu einer Lösung der kubischen Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ führt. Das Schöne daran ist, dass wir beim Nachweis zahlreiche Wissenselemente einsetzen, die im gymnasialen Mathematikunterricht von Bedeutung sind. Daher eignen sich diese Überlegungen überdies zur Repetition von früher Gelerntem.

Zunächst: Bei dieser Konstruktion wird unter anderem der Punkt P_1 auf die horizontale Gerade L_1 gefaltet. Das ist eine Situation, die stark an Parabeln erinnert: Fasst man nämlich P_1 als Fokus und L_1 als Leitgerade einer Parabel auf, so wird die Faltkante eine Tangente an diese Parabel sein. Und da gleichzeitig P_2 auf L_2 gefaltet wird, kann die gesamte Konstruktion aufgefasst werden als das Anbringen der gemeinsamen Tangente an zwei Parabeln. Es ist diese Idee, die bei unserem Vorgehen den Weg leuchtet. Durch die Koordinaten von P_1 und P_2 sowie die Gleichungen von L_1 und L_2 sind die beiden Parabeln bekannt. Die Bedingung, dass die Faltkante eine gemeinsame Tangente ist, wird das gewünschte Resultat hervorbringen.

Betrachten wir zuerst diejenige Parabel p_1, die P_1 als Fokus und L_1 als Leitgerade hat. Ihre Gleichung ist

$$p_1 : y = \frac{1}{4}(x-a)^2 \quad (1)$$



Da P_1 auf L_1 gefaltet wird, ist die Faltkante $y = tx + u$ die Mittelsenkrechte von P_1Q, und diese wiederum ist Tangente an die Parabel p_1 im Punkt $P(x_1 / y_1)$, wobei P und Q dieselbe x-Koordinate haben. Die Steigung t der Faltkante ist gleich

$$t = \frac{d}{dx} p_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1 - a).$$

Und da sie durch den Punkt (x_1 / y_1) führen muss, lautet ihre Gleichung:

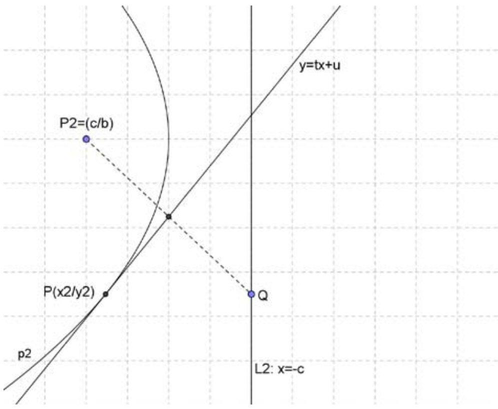
$$\boxed{y = \underbrace{\frac{x_1 - a}{2}}_{t} \cdot x + \underbrace{y_1 - \frac{(x_1 - a) \cdot x_1}{2}}_{u}} \quad (2)$$

Einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung von (1) zeigt, dass t und u wie folgt zusammenhängen:

$$\boxed{u = -t^2 - at} \quad (3)$$

Sei nun p_2 diejenige Parabel, die P_2 als Fokus und L_2 als Leitgerade hat. Dazu müssen wir allerdings annehmen, dass $c \neq 0$ ist; der Fall $c = 0$ ist trivial und wird dem Leser überlassen. Die Parabel gehorcht der Gleichung

$$p_2 : x = \frac{1}{4c}(y - b)^2 \quad (4)$$



Da P_2 auf L_2 gefaltet wird, ist die Faltkante $y = tx + u$ die Mittelsenkrechte von P_2Q, und diese wiederum ist Tangente an die Parabel p_2 im Punkt $P(x_2 / y_2)$, wobei P und Q dieselbe y-Koordinate haben. Wegen

$$\frac{d}{dy} p_2(y_2) = \frac{1}{2c}(y_2 - b)$$

ist die Steigung t der Faltkante gleich

$$t = \frac{2c}{y_2 - b}.$$

Und da sie durch den Punkt (x_2 / y_2) führen muss, lautet ihre Gleichung auch so:

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{2c}{y_2 - b}}_{t} \cdot x + \underbrace{y_2 - \frac{2cx_2}{y_2 - b}}_{u}} \quad (5)$$

Einfaches Nachrechnen zeigt, dass *t* und *u* wie folgt zusammenhängen:

$$\boxed{u = b + \frac{c}{t}} \quad (6)$$

Fügt man (3) und (6) zusammen, so findet man schliesslich

$$\begin{aligned} & -t^2 - at = b + \frac{c}{t} \\ \Leftrightarrow \quad & -t^3 - at^2 = bt + c \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = t^3 + at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Also ist *t* Lösung unserer kubischen Gleichung.

□

Diese Überlegungen machen deutlich, dass all das, was Mathematik kann und was sie nicht kann, stets im Zusammenhang gesehen werden muss mit den Mitteln, mit denen das aktuell benutzte System ausgerüstet wird. Übrigens erscheint Origami höchstens auf den ersten Blick als zwar schöne und reizvolle, aber doch eigentlich nutzlose Kunst. Gerade in den letzten Jahren taten sich ganz unerwartete Anwendungsfelder für die Papierfaltkunst auf. Wann immer ein Objekt an einen Ort transportiert werden soll, wo es eine gewisse Grösse entfalten muss, während es für die Reise dorthin aber klein und kompakt sein muss, ist Origami nicht weit weg. Wenn im Jahr 2014 das *James Webb Space Telescope*, der Nachfolger des *Hubble-Teleskopes*, ins All geschickt werden soll, dann wird der riesige Spiegel nach – allerdings sehr einfacher – Origami-Art gefaltet sein, damit er in die Rakete passt und sich an seinem Bestimmungsort reibungslos entfaltet. Viel raffinierter wird die Faltung bei dem erst projektierten *Eyeglass Telescope* sein, dessen Spiegel nach Entfaltung die Grösse eines Fussballfeldes haben wird. Eine ähnliche Methode wird benutzt, um Solarsegel für den Transport zu falten und um am Computer das schnelle Entfalten und Aufblasen von Airbags zu studieren. (Mehr Details zu diesen Anwendungen finden Sie etwa in den Publikationen von Robert J. Lang oder unter www.langorigami.com.) Zhong You von der Universität Oxford hat einen Stent zur Öffnung von Blutgefässen entwickelt, der sich nach Origami-Art klein faltet für den Transport zur verstopften Stelle und sich dort reibungslos entfaltet, um das Gefäss von innen zu stützten. Diese Beispiele machen deutlich, wie zahlreich und gleichzeitig überraschend die Anwendungen der Mathematik sein können.