

Gebrochener Stab

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

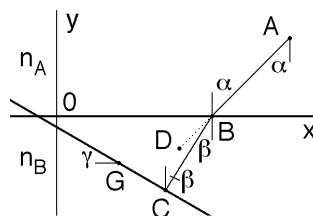
Einleitung

Hält man einen geraden Wanderstab in einen spiegelglatten, klaren Bergsee, so schaut der Stock geknickt aus. Wir wissen natürlich, dass dieser Knick nur ein scheinbarer ist, da er durch Brechung von Licht verursacht wird. Der Anteil des Stabes unter dem Wasserspiegel schaut einigermassen gerade aus. Scheint das nur so oder ist das virtuelle Bild in Wirklichkeit krumm?

Theorie

Wir modellieren den Stab als Gerade, welche die Wasseroberfläche durchstösst (Abb. 1).

Abb. 1: Der Stab wird als Gerade durch Punkt G mit Steigungswinkel γ modelliert. Bei A befindet sich das Auge das in Richtung α blickt. Der "Sehstrahl" trifft bei B aufs Wasser und wird gebrochen. Der "gebrochene Sehstrahl" trifft bei C auf den Stab. Das virtuelle Bild D liegt in der Verlängerung der Blickrichtung.



Das virtuelle Bild des Stabes wird in der Verlängerung der Blickrichtung gesehen. Um seine Lage zu berechnen, legen wir über das ganze ein Koordinatensystem mit x-Achse auf der Wasseroberfläche und y-Achse senkrecht dazu. Alles spiele sich in der (xy)-Ebene ab. Der Stock werde als Gerade durch den Punkt $G(x_G, y_G)$ mit Steigungswinkel γ modelliert:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix}$$

Die parametrische Darstellung ermöglicht es, die Gerade problemlos horizontal oder vertikal zu legen. In Abbildung 1 wurde $\gamma = -\pi/6$ gewählt.

Vom Augenpunkt $A(x_A, y_A)$ wird in Richtung α geblickt. Die Wahl des Winkels passt zum Brechungsgesetz. Vom Auge geht ein "Sehstrahl" mit folgender Darstellung aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Für Abb. 1 ist $\alpha = +\pi/4$ gewählt worden. Der Begriff "Sehstrahl" erinnert an aristotelische Physik, aber das Licht läuft natürlich in umgekehrter Richtung. Der "Sehstrahl" trifft bei $B(x_B, y_B)$ auf das Wasser:

$$y_B = 0 \Rightarrow x_B = x_A - y_A \tan \alpha$$

An dieser Stelle wird der "Sehstrahl" gebrochen; Einfallswinkel α und Brechungswinkel β sind durch das Snellius'sche Brechungsgesetz verknüpft:

$$n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta$$

Der von B ausgehende, gebrochene "Sehstrahl" hat die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Wird der gebrochene "Sehstrahl" mit der Geraden (Stock) geschnitten, so erhält man

$$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} + t_C \cdot \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad t_C = \frac{(x_B - x_G) \cos \beta - (y_B - y_G) \sin \beta}{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}$$

Jetzt kennen wir die Stelle C(x_C, y_C) auf dem Stab, dessen Bild in der Blickrichtung gesehen wird. Um die genaue Position des Bildes D zu berechnen, verfolgen wir Lichtstrahlen, die von C ausgehend zum Auge A laufen. Das erste Stück von C zur Brechungsstelle B hat folgende, schon fast bekannte Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix}$$

Dieser Lichtstrahl trifft bei B auf die Wasseroberfläche:

$$y_B = 0 \Rightarrow x_B = x_C - y_C \tan \beta$$

Der gebrochene Lichtstrahl hat dann die Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{respektive mit dem Winkel } \beta \text{ in Wasser:}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - y_C \tan \beta \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} n_B \sin(\beta)/n_A \\ \sqrt{1 - (n_B \sin(\beta)/n_A)^2} \end{pmatrix}$$

Eliminiert man r aus dieser parametrischen Geradengleichung, so folgt:

$$y = \frac{x - x_B}{\tan \alpha} = \frac{x - x_C + y_C \tan \beta}{\tan(\arcsin(n_B \sin(\beta)/n_A))}$$

Wir haben nun die Gleichung des gebrochenen Lichtstrahls als Funktion des Winkels β , unter dem er bei C ausgestrahlt wird (und das Auge trifft). Erhöhen wir nun β ein klein wenig, so erhalten wir einen benachbarten Strahl. Die rückwärtigen Verlängerungen dieses benachbarten Strahles und des ursprünglichen Strahls schneiden sich im virtuellen Bildpunkt D:

$$y(x, \beta) = y(x, \beta + d\beta) \Rightarrow 0 = y(x, \beta + d\beta) - y(x, \beta) \Rightarrow 0 = \frac{dy(x, \beta)}{d\beta}$$

$$\frac{d}{d\beta} \left(\frac{x - x_B}{\tan \alpha} \right) = 0 \Rightarrow -\frac{dx_B}{d\beta} \tan \alpha - (x - x_B) \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{d\beta} = 0 \quad \text{wobei}$$

mit $\frac{dx_B}{d\beta} = -\frac{y_C}{\cos^2 \beta}$ und $n_A \sin \alpha = n_B \sin \beta \Rightarrow n_A \cos \alpha \cdot \frac{d\alpha}{d\beta} = n_B \cos \beta$ folgt

$$\frac{y_C}{\cos^2 \beta} \tan \alpha - (x - x_B) \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{n_B \cos \beta}{n_A \cos \alpha} = 0 \quad \text{und damit}$$

$$x_D = x_B + y_C \tan \alpha \frac{n_A \cos^3 \alpha}{n_B \cos^3 \beta} \quad \text{sowie} \quad y_D = y_C \frac{n_A \cos^3 \alpha}{n_B \cos^3 \beta}$$

Ausgerüstet mit diesem Algorithmus kann man für jede Blickrichtung ausrechnen, wo das virtuelle Bild des Stockes liegt.

Virtuelle Bilder

Der im vorangehenden Abschnitt dargestellte Algorithmus lässt sich relativ einfach auf einem Rechner in Bilder umsetzen. In den folgenden Abbildungen wurde das virtuelle Bild des Stocks für verschiedene Blickrichtungen berechnet. Die Bildpunkte sind durch eine Linie mit den entsprechenden Gegenstandspunkten auf dem Stab verknüpft.

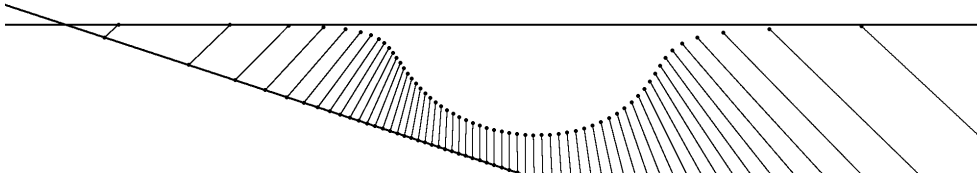


Abbildung 2: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser gesteckt und von oben betrachtet wird. Das Auge (fetter Punkt) schwebt in der Mitte über dem Wasserspiegel (horizontale Linie). Für verschiedene Blickrichtungen wurde die Lage des virtuellen Bildes (fette Punkte) berechnet und der Bildpunkt mit dem entsprechenden Gegenstandspunkt auf dem Stock verbunden.

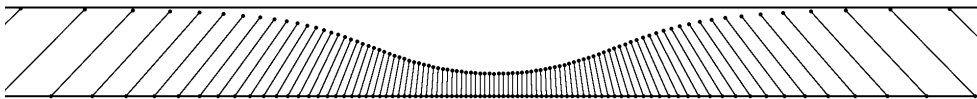


Abb. 3: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der parallel zum Wasserspiegel untergetaucht ist. Die vom Auge weit entfernten Verbindungslinien Bild-Gegenstand werden asymptotisch parallel und laufen unter dem Grenzwinkel der Totalreflexion. Schaut man in ein Schwimmbecken, so scheinen die Bodenmarkierungen nach oben gebogen zu sein.

Abb. 4: Virtuelles Bild eines Stabes, der vertikal ins Wasser gehalten wird. Diese Situation entspricht etwa der, wenn man hüfttief im Wasser steht, sich etwas nach vorne beugt und die Beine betrachtet. Das virtuelle Bild der Beine scheint verkürzt und etwas nach vorne abgknickt zu sein.

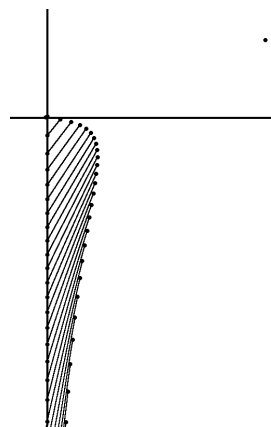
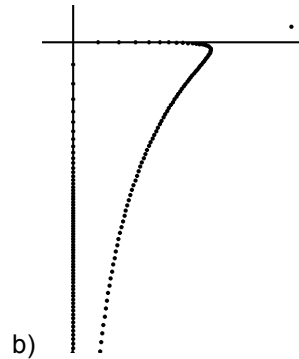
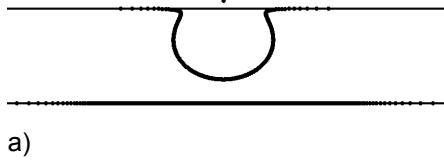


Abb. 5a (unten) wie Abb. 3 und 5b (rechts) wie Abb. 4, aber mit dem Auge näher am Wasser.



Zum Schluss noch die Situation "Stock ins Wasser stecken":

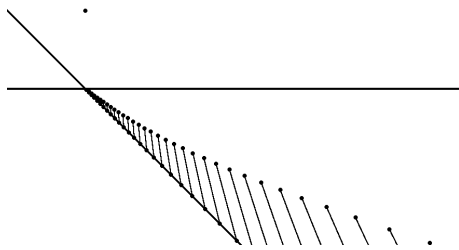


Abb. 6: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser getaucht wird. Das Auge (fetter Punkt) befindet sich direkt über der Eintauchstelle. Das virtuelle Bild des geraden Stocks ist also leicht krumm.

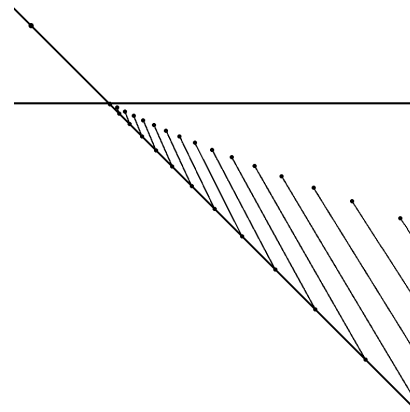


Abb. 7: Virtuelles Bild eines geraden Stabes, der schräg ins Wasser getaucht wird. Das Auge (fetter Punkt) befindet sich in der Verlängerung des Stocks. Das virtuelle Bild ist leicht gekrümmt.

Experiment

Ich klebte ein Papier mit Punkten an die Rückseite eines Aquariums aus dünnem Kunststoff (Abb. 8). Die schwarzen Punkte hatten Abstand 10.0 mm (Periode). Durch das Wasser gesehen erscheinen die Punkte deutlich grösser und näher.

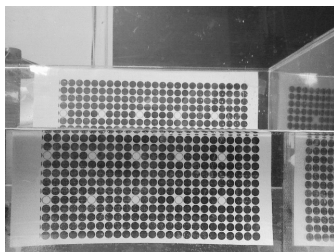


Abb. 8a: Blatt mit Punktmuster, das an der äusseren Rückwand eines Aquariums klebt.

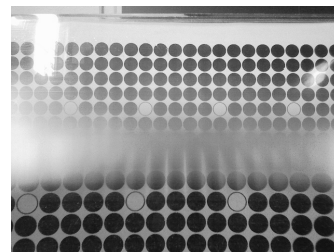


Abb. 8b: Wie 8a, aber mit der Kamera direkt an der Vorderwand des Aquariums.

In Abbildung 8b wird das Punktmuster durch 20 cm Luft (oben) und durch 20 cm Wasser (unten) gesehen. Unter der Wasserlinie ist das Muster im Bildzentrum rund 1.34 ± 0.02 Mal grösser als über der Wasserlinie. Um denselben Faktor scheint das Muster unten näher zu sein. Diesen Effekt nennt man Bildhebung und der erwähnte Faktor ist natürlich der Brechungsindex von Wasser (zumindest in guter Näherung). Am Rand des Bildfelds ist die Vergrößerung noch stärker, wie man auch nach Abbildung 3 erwarten würde.

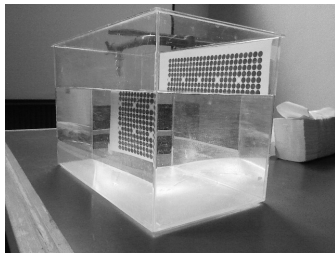


Abb. 9: Schräger Blick aufs Aquarium. Durch das Wasser gesehen ist das Bild sowohl näher am Auge als auch näher an der Wasseroberfläche (= Aquarium-Vorderwand). Das Aquarium ist 39 cm lang, 20 cm breit und 25 cm hoch. Das Wasser steht 17 cm hoch.

In Abb. 9 schaut man schräg auf das Aquarium. Das Punktmuster scheint durch das Wasser gesehen näher an der Vorderseite des Aquariums zu sein. Bei diesem flachen Blickwinkel ist die Vergrößerung nicht mehr so stark wie in Abb. 8b.

Leider hat meine Handykamera kein Weitwinkelobjektiv, eine Photographie wie in Abbildung 5a war nicht möglich. Mit einer besseren Kamera sollte auch eine dreidimensionale Vermessung des virtuellen Bildes möglich sein. So musste ich es bei einer rein visuellen Kontrolle an den Aquarien unserer Schule bewenden lassen.