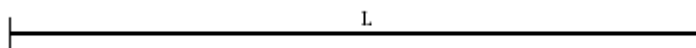


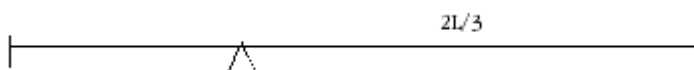
## Die musikalische Tonleiter: eine faszinierende Geschichte (erster Teil)

Der griechische Philosoph und Mathematiker **Pythagoras von Samos** führte bereits 500 Jahre vor Christus eine Tonleiter nach folgendem Rezept ein:

- Man starte mit einer schwingenden Saite der Länge  $L$ . Den Ton, den sie produziert, nennen wir den Grundton  $t_1$ .



- Man verkürze die Saite um  $1/3$ . Die Saite mit der Länge  $2L/3$  produziert einen Ton  $t_2$ , der gut mit dem Ton  $t_1$  harmoniert.



- Man kann nun diesen neuen Ton als Ausgangston zur Konstruktion eines weiteren Tons nach demselben Verfahren verwenden. Wenn aber die so erhaltene neue Saitenlänge kürzer wird als  $L/2$ , so verdoppelt man sie. Dadurch bleibt man stets in der Grundoktave. Setzt man diese Prozedur fort, so erhält man eine Folge von immer neuen Tönen bei folgenden Saitenlängen:

Saitenlängen: tonleiter-3.gif

- Die Prozedur soll dann abgebrochen werden, wenn die Saitenlänge des gerade erhaltenen neuen Tones nur noch um so wenig von der Saitenlänge des Ausgangstones abweicht, dass man den Unterschied zum Ausgangston kaum noch wahrnimmt.

In MATLAB würde man beispielsweise diesen Algorithmus folgendermassen formulieren:

```
L=2/3;
Ton=1;
eps=0.02           % Abbruch-Toleranz
while L<1-eps
    Ton=[Ton,L];
    L=2*L/3;
    if L<0.5
        L=2*L;
    end
end
end
```

Bei der Toleranz  $\text{eps} = 0.02$  bricht das Verfahren nach 12 Schritten ab, und man erhält folgende Töne:

Ton	Saitenlänge
Nr.	in % von L

---

1	100.00
---	--------

2	66.67
3	88.89
4	59.26
5	79.01
6	52.67
7	70.23
8	93.64
9	62.43
10	83.24
11	55.49
12	73.99
13	98.65 : Abbruch

Mit folgendem MATLAB-Zusatzprogrammchen kann man die Töne sortieren und graphisch darstellen. Dabei wird der Logarithmus der zugehörigen Saitenlänge in Funktion der Tonnummer aufgetragen.

```
Ton=sort(Ton)      % Sortiere Töne
plot(log(Ton), 'm.')
```

Mit wenig Aufwand kann man auch noch eine lineare Regression durch die Punkteschar durchführen und die erhaltene Gerade im gleichen Plot zeichnen.

```
hold on
x=1:length(Ton);
p=polyfit(x,log(Ton),1)
x=1:0.01:length(Ton);
y=polyval(p,x);
plot(x,y)
```

tonleiter-4.gif

Die Prozedur wurde mit einem Fehler von  $1-0.9865 = 1.35\%$  abgebrochen. Diesen Fehler nennt man das «Pythagoräische Komma». Er beträgt exakt  $1-219/312$ .

Die Töne der so erhaltenen pythagoräischen «Tonleiter» bilden nahezu eine geometrische Folge. Das Verhältnis der Saitenlängen zu jeweils zwei aufeinanderfolgenden Tönen ist in der zweiten Kolonne der folgenden Tabelle sichtbar. In der dritten Kolonne findet man das Verhältnis der Saitenlängen zu zwei Tönen, die jeweils 4 Tonleiterschritte auseinanderliegen (grosse Terz). In der vierten Kolonne liegen die Töne, von denen das Verhältnis der zugehörigen Saitenlängen gebildet wurde, jeweils 7 Tonschritte auseinander (Quint).

**Ton   Halbton   gr. Terz   Quint**

---

1 (C)	1.0535	1.2656	1.5000
2 (C#)	1.0679	1.2656	1.5000
3 (D)	1.0535	1.2486	1.5000
4 (D#)	1.0679	1.2656	1.5000
5 (E)	1.0535	1.2486	1.5000
6 (F)	1.0535	1.2656	1.5000
7 (F#)	1.0679	1.2656	1.5000
8 (G)	1.0535	1.2656	1.5000
9 (G#)	1.0679	1.2656	1.5000
10 (A)	1.0535	1.2486	1.5000
11 (A#)	1.0679	1.2656	1.5000
12 (H)	1.0535	1.2486	1.4798

In der geometrischen Folge treten zwei verschiedene Verhältnisse auf: 1.0535 und 1.0679. Das grössere ist seltener. Es charakterisiert die Töne, die in der heutigen Bezeichnung mit einem # versehen werden.

Die reine grosse Terz erhält man, wenn man die zugehörigen Saitenlängen im Verhältnis  $5/4$  wählt. Ein Verhältnis  $3/2$  führt zur reinen Quint. Wie erwartet, sind mit einer einzigen Ausnahme alle Quinten der Pythagoräischen Tonleiter rein. Die Terzen sind - bis auf vier - alle zu gross. Die 4 Ausnahmen stellen fast reine Terzen dar. Ihre Abweichung zur reinen Terz beträgt nur etwa 1 Promille.

Das Pythagoräische Komma ist sehr gut hörbar. Wäre man noch grosszügiger gewesen, so hätte man den Pythagoräischen Algorithmus bereits bei einer Toleranz von beispielsweise 10% abbrechen können. Der Algorithmus bricht dann bereits nach 7 Tönen mit einem Fehler von  $1 - 0.9364 = 6.36\%$  (exakt:  $1 - 211/37$ ) ab. Die zugehörige Tonleiter umfasst die 7 Töne

C D E F G A H.

Macht man die Abbruch-Toleranz nur infinitesimal kleiner als  $1 - 211/37$ , so bekommt man sofort die zusätzlichen 5 Halbtöne C#, D#, F#, G# und A#. Wenn man die Abbruch-Toleranz nur infinitesimal kleiner als das Pythagoräische Komma  $1 - 219/312$  macht, so erhält man schlagartig 53 Töne. Der Fehler beträgt dann nur noch etwa 2 Promille.

Eine andere Fehlergrenze gibt es bei  $11.1\% = 1 - 23/32$ . Ist die Abbruch-Toleranz infinitesimal grösser als diese Grenze, so erhält man nur die beiden Töne C und A. Ist sie hingegen nur infinitesimal kleiner, so kommen sofort die 5 Töne D E F G und H hinzu.

**Welches ist das nächste Glied in der Folge 1, 2, 7, 12, 53, ....?**

Radolf von Salis, Gymnasium Liestal