

Copy and Paste: Mathematikunterricht aus dem World Wide Web ?

Werner Hartmann,
 Departement Informatik ETH Zürich und Kantonsschule Baden,
 hartmann@inf.ethz.ch

Vorbereitung just in time!

WER KENNT die Situation nicht: ein schöner Sonntagabend im Sommer. Man verweilt ein bisschen länger als geplant in der fröhlichen Runde beim Gartensitzplatz. Und dabei müsste man doch noch für die 3. Klasse ein Übungsblatt zu den Potenzgesetzen zusammenstellen und in der Abschlussklasse wäre es ja wirklich schön, wenn man die Schülerinnen beim Thema “Newtoniteration für Funktionen einer reellen Variablen” selber die gleichzeitig herrschende Ordnung und Unordnung entdecken lassen könnte. Genau so ist es mir als Verfasser der nachfolgenden Zeilen gegangen:

Da habe ich doch versprochen, für das Bulletin etwas zum Thema “Mathematikunterricht und Internet” zu schreiben. Und wie immer habe ich erst im letzten Moment damit angefangen. Viel Zeit bleibt nicht, was kann ich da machen?

“Copy and Paste” ist die Lösung! Sicher haben sich schon andere Leute Gedanken zum Thema “Internet und Mathematikunterricht” gemacht. Die Frage ist nur, wie und wo findet man diese Ideen? Ein erster Versuch mit der Anfrage *Mathematik Unterricht Internet* bei der Suchmaschine *www.google.de* liefert gleich schon eine ganze Fülle von Informationen:

Das Internet im Unterricht: Mathematik Eine Uebersicht fuer die Nutzung ...
www.fmi.uni-passau.de/schule/unterricht/links/mathematik.html

net-Learn.de: Online-Unterricht Online-Unterricht
www.net-learn.de/

Internet & MATHEMATIK-Unterricht
 Schwerpunkt Mathematik - Arbeitsvorschlaege. ...
schulen.hagen.de/SAN/OE/mathnat/AB_Mathematik.htm

Gymnasium Steglitz Berlin - Internet-Links f"ur den Unterricht ...
www432.15.xodox.com/html/internet_links_ma.htm

ICC-Web Unisearch: Schulen Unterricht : Mathematik Eine Uebersicht ...
www.icc-web.de/links1/built/Schulen_Unterricht/Mathematik/

Lernen - FachInfos Klagenfurt Ein sehr umfassender Einfuehrungstext ...
www.mbsued.de/Lernen/lernen_2.htm

Hausarbeiten.de Das Wissensarchiv im Internet.
www.hausarbeiten.de/cgi-bin/superDBdruck.pl/archiv/mathematik/mathe-unterricht.shtml

Die erste angegebene Adresse führt auf ein Verzeichnis interessanter Internet-Adressen für

den Mathematikunterricht: Persönlichkeiten und Geschichte, Mathematik am Computer, Mathe-

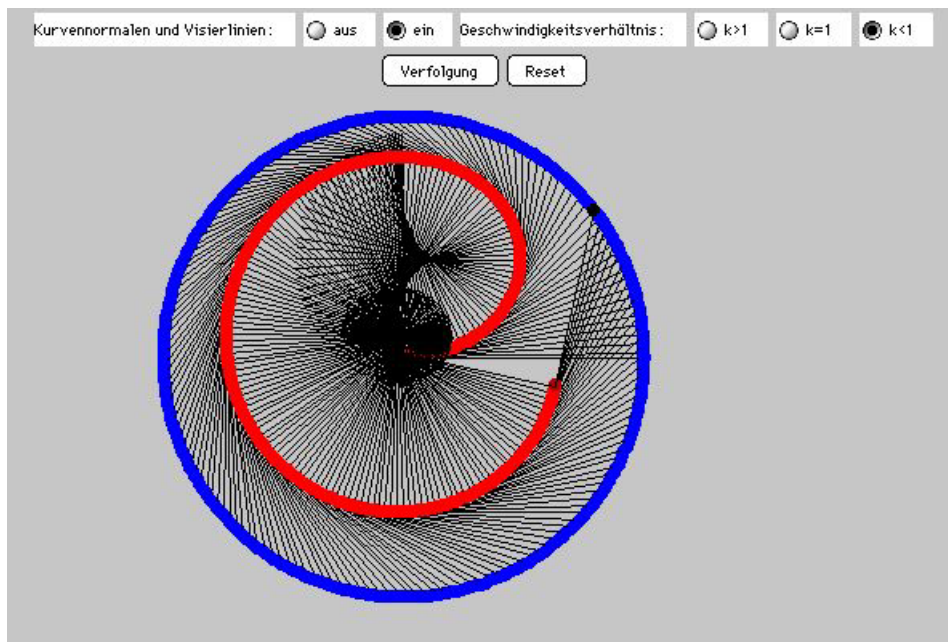


Abbildung 1: Animierte Hundekurve

matik in der Schule, Mathematische Literatur, Mathematik in der Praxis und eine Linksammlung sind hier zu finden. Die nächste Adresse ist für mich weniger interessant. Sie führt zu einer Aufgabensammlung für die Jahrgangsstufe 5 und 6. Hier können Schülerinnen und Schüler beispielsweise Textaufgaben lösen und erhalten ein Feedback in der Form "Antwort richtig oder falsch". Was macht der Schüler, wenn er schlicht nicht weiss, wie er die Aufgabe anpacken muss? Das dritte angezeigte Dokument umfasst wiederum eine Sammlung interessanter Links zum Mathematikunterricht. Einleitend steht:

Diese Seite stellt nur eine kleine Auswahl einer Vielzahl von Internetseiten zur Mathematik dar. Die Übersicht soll Einstiegsmöglichkeiten bieten und zum weiteren Forschen anregen. Um dem Informationsdschungel - wenigstens für eine gewisse Zeit - zu entkommen, sollten Sie sich diese Angebote ansehen und selbst entscheiden, welche für Ihren Unterricht brauchbar erscheinen. Le-

gen Sie sich Lesezeichen / Bookmarks an und überprüfen Sie regelmässig, ob die Internet-Adressen noch stimmen.

Zwei wichtige Punkte werden hier aufgegriffen: Im World Wide Web findet sich inzwischen eine nicht mehr überblickbare Menge von Informationen rund um das Thema Mathematik. Als Lehrer notiere ich mir für gut befundene und nützliche Adressen in der Form von Lesezeichen. Und wenn ich eine wirklich gute Quelle gefunden habe, dann mache ich mir davon auch eine lokale Kopie auf meinem eigenen Rechner oder einen Ausdruck. Informationen im Internet sind flüchtig und man ist nie sicher, ob eine Seite beim nächsten Besuch noch vorhanden ist.

Das dritte bei meiner ad hoc Suche gefundene Dokument verweist auf ganz viele Quellen. Ich wähle das Thema "Hundekurven". Hier finde ich allerlei rund um Hundekurven, und speziell interessant: Es gibt interaktive Animationen, kleine sog. Java-Applets, die direkt im Web-Browser ausgeführt werden können. Abbildung 1 zeigt als Beispiel die Verfolgung eines Kreisläufers.

Um in den Genuss der Animation zu kommen, muss man selbstverständlich das Applet direkt auf dem Web betrachten¹. Ein weiterer Link² verweist mich auf die Web-Site einer Mathematiklehrerin, welche Aufgabenblätter, Prüfungen usw. anderen Kolleginnen zur Verfügung stellt. Ich stosse auf eine interessante Abituraufgabe, bei welcher lineare Abbildungen im Kontext eines Produktionsprozesses behandelt werden. Ich lade die dazugehörige pdf-Datei herunter und lege sie in meinen Ordner Matur 2001. In zwei Monaten – beim Zusammenstellen meiner Maturaufgaben – werde ich froh sein um Ideen und Anregungen!

Inzwischen habe ich mich längst weit vom Ausgangspunkt meiner Surfreise entfernt und bin auf <http://www.zum.de/dwu/umamaz.htm> gelandet. Hier stellt ein Lehrer eine ganze Sammlung von Kopiervorlagen für Folien und Arbeitsblätter zur Verfügung. Für meinen Geschmack ist alles ein bisschen zu bunt! Aber beim Web ist das ja kein Problem, mit einem Mausklick ist man gleich weiter und die anfallenden Kosten sind auch gering. Wenn ich da an die vielen gekauften Bücher denke, von denen ich dann letztlich doch enttäuscht war und die ich spätestens bei der nächsten Züglete jeweils entsorgen muss....

Super: Jetzt bin ich bei <http://forum.swarthmore.edu/articles/epadel/> gelandet, dem Math Forum des Swarthmore College. Auf dieser Seite berichtet Gene Klotz über seine Erfahrungen mit dem Internet im Mathematikunterricht. Unter dem Abschnitt *What are we going?* schreibt er unter anderem:

You probably can't avoid the World Wide Web, and there are reasons for embracing this future along with being aware of current problems with the medium. The Web is permeating the world of mathematics for good reasons, from research mathematics to college teaching, and it may actually help with some other problems facing us. There are good evolutionary changes in store.

One effect of Web encroachment will be that we won't be as isolated as we have been in pursuing our mathematical and teaching interests. In particular,

research collaboration with colleagues at other institutions will become vastly easier as the capabilities of Web programs that combine whiteboards, audio, and video improve and the technology becomes more readily available.

In teaching, when we spend time making up a neat example, we'll put it on the Web for our students to use and to share with colleagues elsewhere. (After all, when we need a neat example and don't have time to make it, it will be nice to borrow one). We'll get a much better sense of our common problems, more easily find kindred souls with common interests, and have great possibilities of expressing our individuality.

For both teaching and research, the World Wide Web will become a major form of communication (see Section, How will the Web change mathematics publications?, and Section under How the Web will change our teaching). Although print (and printouts) will continue to be useful, the possibility of electronic searching and going immediately to examples, other references, definitions, etc. will pull us Webward. Also, as Herb Wilf asserts, Web pages will just be prettier. Our students will gravitate toward Web pages for the same reasons we will, and soon will complain bitterly at having to use a monochromatic medium without interactivity – what, no applet to do symbolic integration or 3D graphics? Last but not least, for financial reasons those radicals, the librarians, will provide a powerful push toward the Web.

Was war doch mein ursprüngliches Problem? Ach ja, einen Artikel sollte ich ja schreiben zum Thema "Mathematikunterricht und Internet". Kein Problem, Copy and Paste, jetzt bin ich mitten im Thema. Aber zuerst will ich mir doch noch die Leckerbissen auf der *Gallery of Interactive Online Geometry* des Geometry Centers anschauen.

¹<http://www.did.mat.uni-bayreuth.de/~susanne/verfolgung/Kreislaeufer.html>

²<http://home.t-online.de/home/Arne.Madincea/>

<http://www.geom.umn.edu/>

Das Geometry Center ist ein mathematisches Forschungs- und Schulungszentrum an der Universität Minnesota. Es bietet eine ganze Reihe von mathematischen Visualisierungen, Unterrichtssoft-

ware und Videoanimationen für den Unterricht an. Beispielsweise findet man eine ganze Sammlung von Materialien zum Regenbogen: In Abbildung 2 ist eine interaktive Animation zur Beobachtung des Strahlenverlaufs bei zweifacher Reflexion in einem Wassertropfen dargestellt.

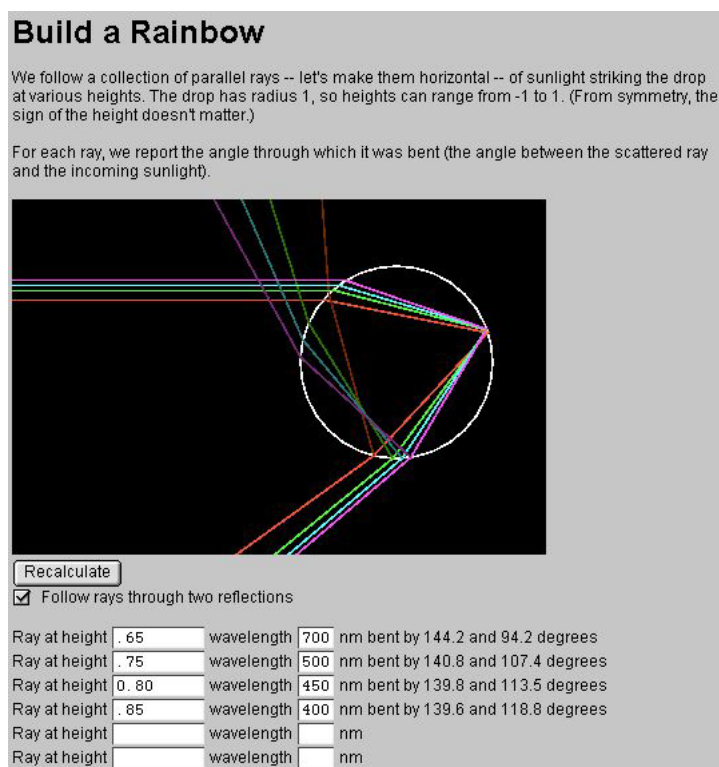


Abbildung 2: Doppelter Regenbogen

Insbesondere kleine Experimentierumgebungen sind für den Unterricht wertvoll. Direkt im Browser – ohne irgendwelche Software installieren zu müssen – kann jeder Schüler selber auf mathematische Entdeckungsreisen gehen und den Einfluss der verschiedenen Parameter auf den Strahlenverlauf beobachten. Ein kleiner Wermutstropfen: Um im Unterricht solche Lernumgebungen einsetzen zu können, bin ich natürlich auf Computer und Internetzugang angewiesen. Leider ist "meine" Schule im Bezug auf IT-Infrastruktur nicht gerade reich bestückt und ich muss froh sein, wenn der Compu-

terraum überhaupt einmal frei ist. Ich träume deshalb immer wieder davon, dass jede Schülerin und jeder Schüler ein eigenes Notebook mitbringt, dieses wie Bleistift oder Taschenrechner als Werkzeug einsetzt und selbstverständlich nur Mathematik damit betreibt....

Das Geometry Center ist ein typischer Vertreter in einer langen Liste von Web-Servern mit einem Angebot von direkt für den Unterricht einsetzbaren Materialien. Ich selber habe mir längst angewöhnt, vor jedem neuen Kapitel im Unterricht zuerst im Web eine kleine Recherche zu machen.

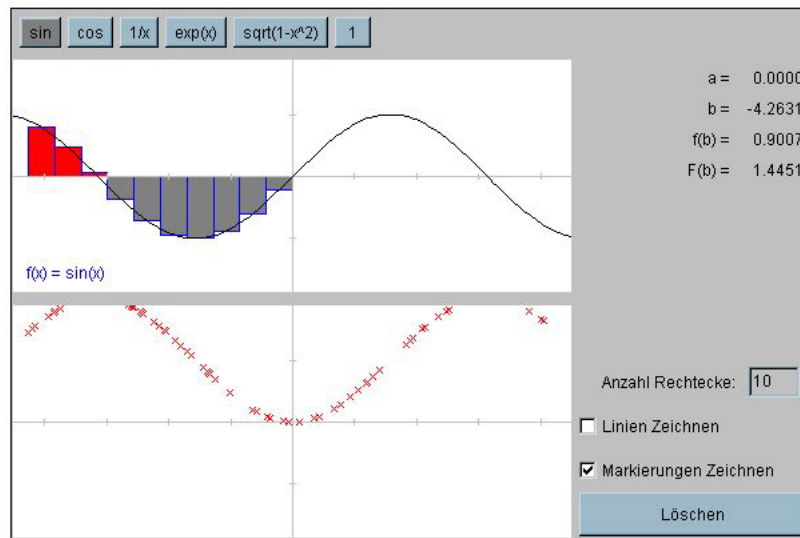


Abbildung 3: Numerische Integration und Flächenfunktion

Sehr oft finde ich gute Beispiele, Bilder oder gar kleine web-basierte Lernumgebungen. Machen wir doch gleich die Probe aufs Exempel: Nächste Woche will ich den Begriff des unbestimmten und des bestimmten Integrals einführen. Was finde ich dazu mit der Anfrage *Java Applet Integral Flächenfunktion* bei der deutschen Suchmaschine *www.fireball.de*? Gleich das erste Dokument "EducETH - Mathematik - Mathematik-Puzzles <http://www.educeth.ethz.ch/mathematik/puzzles/>" ist ein Volltreffer. Auf dem Bildungsserver EducETH findet sich eine ganze Puzzle-Einheit zum Themenkreis "Numerische Verfahren der Analysis". Das Puzzle ist für Schüler und Schülerinnen gedacht, welche noch keine Erfahrung mit Begriffen wie Ableitung, Integral oder Flächenfunktion haben. Zu jedem Thema gibt es ein Applet, welches den Begriff erklärt und eine numerische Methode visualisiert. Abbildung 3 zeigt das Applet zur Berechnung der Fläche unter einem Kurvenstück.

EducETH ist ein Beispiel von einem sog. Materialserver für Schulen. Auf EducETH findet man unter der Rubrik Mathematik auch Leitprogramme, welche heruntergeladen und ausgedruckt werden können. Oder eine ganze Werkstatt zum Oberthema "Multiplikation" mit über zwanzig Werkstattposten.

Solche Materialsammlungen auf dem Internet können für Lehrpersonen viele Anregungen liefern

und auch eine effizientere Vorbereitung des Unterrichts unterstützen. Die Nachfrage nach solchen Angeboten ist riesig. So verzeichnete allein das doch noch bescheidene Angebot im Fach Mathematik auf EducETH in der ersten Dezemberwoche 2000 über 5'000 Seitenzugriffe und es wurden jeden Tag rund 50 Unterrichtseinheiten wie Lernaufgaben oder Leitprogramme vom Server bezogen.

Meistens wird das Angebot auf Schulservern von engagierten Lehrerinnen und Lehrern in der Freizeit bereitgestellt. Die permanente Wartung eines Schulservers und die laufende Akquisition neuer Materialien ist ein aufwändiger Prozess. Viele Schulserver kämpfen denn auch mit mangelnden Ressourcen. Beim Geometry Center, das weit mehr als ein Schulserver ist, findet sich auf der Einstiegsseite der Vermerk: "The Geometry Center is now closed. This web site continues as a repository for much of the materials and projects from the Geometry Center, but the Center no longer operates any physical facilities, and has no staff." Auch die Betreiber von EducETH – obwohl der grösste und meist besuchte Schulserver auf Sekundarstufe II in der Schweiz – können sich nicht grosser Unterstützung seitens der Bildungsinstitutionen erfreuen. Gesuche um finanzielle Unterstützung seitens der EDK sind bis heute immer auf taube Ohren gestossen. Der Bund zieht es vor, Gelder in Millionenhöhe in das Projekt eines Schweizerischen

Schulservers zu investieren, dessen "Going Public" nun auch schon ein Jahr auf sich warten lässt.

Jetzt bin ich schon wieder abgeschweift. Eigentlich sollte ich ja noch ein Übungsblatt zu den Potenzgesetzen zusammenstellen. Wenn ich könnte, hätte ich die Potenzgesetze schon längst in die Wüste geschickt. Hier gilt "Übung macht den Meister" und ich unterrichte dieses Thema nur ungern.

Übung macht den Meister: die smarte Aufgabensammlung

Es gibt sie wirklich, smarte Aufgabensammlungen für den Mathematikunterricht. Unter <http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/> findet sich beispielsweise die in einem Arbeitskreis am Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung in München entwickelte Aufgabensammlung SMART. Hier können Sie Mathematikaufgaben ansehen und Aufgabenblätter in einer Art Sammelkorb zusammenstellen und ausdrucken. Unterstützt werden die Ausgabeformate PDF, PostScript, GIF, DVI, TeX. Verfügt man selber über das Programm TeX (NB: Für Mathematiker/innen so oder so ein Muss), so können die Aufgaben auch bearbeitet werden. Momentan enthalten die Jahrgangsstufen 5, 6, 8, 9, 10 und 11 Daten. Insgesamt sind ca. 1900 Aufgaben vorhanden. Ich stelle mir per Mausklick ein Übungsblatt zusammen. Dazu wähle ich einfach die mir passend erscheinenden Aufgaben und ordne diese in der gewünschten Reihenfolge an. Zum Schluss brauche ich das Übungsblatt nur noch auszudrucken. Das Resultat sieht dann zum Beispiel wie in Abbildung 4 aus.

Die Aufgabensammlung SMART bietet nicht nur die Aufgaben an, sondern auch gleichzeitig deren Lösungen. Mich würde es nicht überraschen, wenn dereinst die gedruckten Aufgabensammlungen aus den Bücherregalen verschwinden würden. Nur nebenbei: Eine web-basierte Aufgabensam-

Fazit: Wer sucht der findet!

Das Internet ist voll interessanter Quellen und Informationen und damit eine Bereicherung für den Mathematikunterricht. Warum als Ein-

mlung ist selbstverständlich nicht einfach gut, weil sie web-basiert ist. Das Entscheidende ist und bleibt der Inhalt, d. h. die Qualität der Aufgaben.

So weit so gut, aber: Spannend könnte es unter Umständen auch sein, Mathematikaufgaben direkt online zu bearbeiten. Ohne Papier und Bleistift!

Mathe online – zuhause oder in der Schule

Online-Lernumgebungen für den Mathematikunterricht gibt es. www.univie.ac.at/future.media/mo/galerie.html ist ein empfehlenswertes Beispiel. Die Galerie Mathe Online besteht aus interaktiven multimedialen Lernhilfen zu verschiedenen Themenbereichen, die das Verstehen erleichtern sollen. Technisch gesehen handelt es sich hauptsächlich um Java-Applets, ergänzt durch einige grafikbasierte Einheiten und sonstige Programme. Eine zusammenhängende Skizze der zugrundeliegenden Stoffgebiete findet sich in den Mathematischen Hintergründen. Die wichtigsten Begriffe werden zudem im Lexikon erläutert. Zum Üben und zur (Selbst)Kontrolle stehen interaktive Tests zur Verfügung. Die Galerie befindet sich seit März 1998 an der Universität Wien im Aufbaustadium. Es werden laufend neue Lernhilfen hinzugefügt. Speziell interessant ist auch ein kleines Framework, mit dem eine Lehrerin selber kleine Lernumgebungen erstellen kann: www.univie.ac.at/future.media/mo/puzzles.html.

Ich habe selber schon sehr gute Erfahrungen gemacht mit den Puzzles zur 1. und 2. Ableitung einer Funktion. Hier geht es darum, zusammengehörende Graphen zu erkennen. Durch die recht grosse Vielfalt der angebotenen Graphen eine gute, für die Schüler zudem attraktive Übungsumgebung. Abbildung 5 zeigt eine mögliche Aufgabenstellung. Per Mausklick sind die Graphen in der rechten Hälfte so auf der linken Seite zu plazieren, dass untereinander die Graphen der Ausgangsfunktion, der 1. und der 2. Ableitung stehen.

stieg in den Geometrieunterricht nicht die Schüler nach den heute aktuellen Fragestellungen in der Forschung suchen lassen? Beim Thema Polyeder finden sich hochwertige aktuelle Informatio-

Ein smartes Beispiel

1. Vereinfachen Sie möglichst weitgehend und schreiben Sie das Endergebnis ohne Bruchstrich:

$$\frac{(3u^4v^{-1})^2}{(9u^{-2}v^{-3})^{-1}} : \frac{(2u^{-6}v^3)^{-3}}{(2u^5v^{-2})^4}$$

2. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$(3a - 7b)^{2n+1} \cdot (7b - 3a)^{2n+1}$$

3. Vereinfachen Sie:

$$\frac{r^{3m+2}}{a^{m+3}} : \frac{r^{2m-2}}{a^{m+2}}$$

4. Vereinfachen Sie so weit wie möglich ($a, b \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{x^{2a+5}}{(-y^3)^{2b+5} \cdot [(-z)^4]^{3b+3}} : \frac{x^{2a}}{(yz)^{6b+10} \cdot [(-z)^3]^{2b-1}}$$

5. Vereinfachen Sie folgenden Term so weit wie möglich! Im Ergebnis sollen nur positive Exponenten auftreten!

$$\left[\left(\frac{5x^0 \cdot 100}{0,02^{-2} \cdot (-y)^{-3}} \right)^4 : \left(\frac{y^{5-2l}}{-(-yx^2)^0} \right)^2 \right]^{-5} \cdot (-0,02^{-30})^{-1} \cdot (-5)^{-20}$$

Probieren Sie es doch selber

Abbildung 4: Aufgabenblatt zu Potenzgesetzen

nen zu Fullerenen. Für Räuber-Beute-Modelle findet man aktuelle Daten, und ein Interview mit einer berühmten Mathematikerin kann lehrreicher sein als ein Dutzend weiterer Beispiele zur Integration durch Substitution. Und warum nicht ein Projekt zu mathematischen Kartentricks initialisieren. Unter www.ams.org/new-in-math/cover/mulcahy1.html werden sechs auf Martin Gardner zurückgehende Kartentricks eingehend diskutiert. Überhaupt ist die Adresse <http://www.ams.org/> der American Mathematical Society eine wahre Fundgrube. Die Stärke des Internets liegt ganz klar darin, dass es uns viele wertvolle Informationen gratis und franko ins Hause liefert. Und für Visualisierung und Animation dynamischer Abläufe war der Computer schon immer ein sehr geeignetes Werkzeug.

Für den Lehrer wird die Arbeit aber nicht

weniger: Erstens wird die Mathematik online und virtuell nicht einfacher. Schwierige Konzepte bleiben schwierig und bedürfen einer sorgfältigen, didaktisch durchdachten Behandlung im Unterricht. Und das Suchen von guten Informationen ist im Datenschwungel des World Wide Webs auch keine einfache Aufgabe. Aber gerade hier ergibt sich eine spannende, neue Anwendung für den Mathematikunterricht! Suchmaschinen rangieren die gefundenen Dokumente aufgrund von Regeln zur Relevanzbestimmung. Diese Rangierungsregeln basieren auf mathematischen Prinzipien. In einfacher Form sind diese Regeln auch für die Schule zugänglich. Suchmaschinen indexieren Dokumente und Anfragen. Die entstehenden Indices sind nichts anderes als Vektoren. Bei der Rangierung spielt das Skalarprodukt eine Rolle. Salopp ausgedrückt: Ein Dokument stimmt umso mehr mit einem anderen

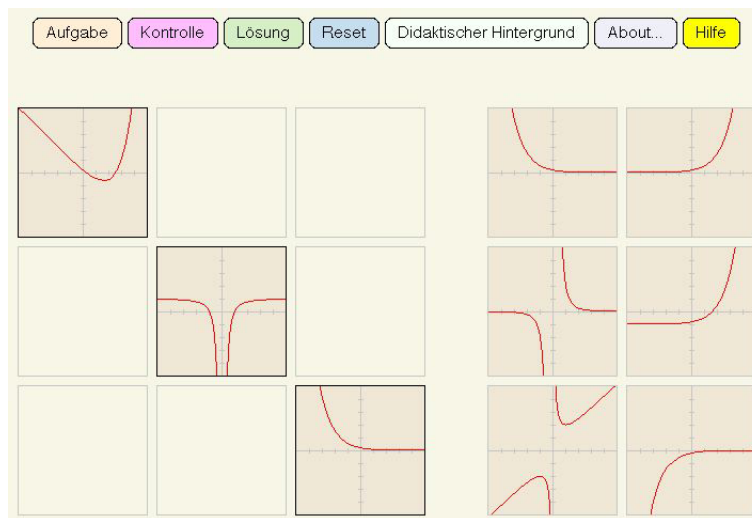


Abbildung 5: Zuordnung von Graphen beim Ableiten

Dokument überein, je näher die beiden Vektoren zueinander sind, d. h. je kleiner der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Ebenso spielen Matrizen eine Rolle, und Eigenvektoren erhalten im Umfeld von Search Engines eine unerwartete neue Bedeutung. Wollen Sie mehr wissen? M. W. Berry, M. Browne: Understanding Search Engines, Mathematical Modeling and Text Retrieval. SIAM 1999,

ISBN 0-89871-437-0.

So das reicht! Über Internet und Mathematikunterricht ein Papier schreiben oder lesen? Viel besser wäre es wohl gewesen, Sie hätten sich gleich selber auf eine mathematische Entdeckungsreise im Internet gemacht. Viel Vergnügen und Erfolg!