

“Et c’est là qu’il faut d’autant plus chercher par le raisonnement qu’il est moins possible d’être renseigné par l’expérience.”

– Pascal

Le triangle de Pascal et le problème des partis

Eugène Pasquier
Collège du Sud, Bulle

LE TRIANGLE arithmétique était connu et utilisé bien avant l’époque de Pascal. C’est à ce dernier cependant que revient le mérite d’en avoir analysé les structures et les propriétés afin de les utiliser avec ingéniosité dans différents domaines des mathématiques. Dans ce texte, nous nous intéresserons à son application au problème des partis.

Définition et deux propriétés du triangle arithmétique

On considère un système de lignes et de colonnes comme indiqué sur la figure 1 permettant de définir des cellules. La cellule (i, j) est le carré se trouvant à l’intersection de la i^e ligne et de la j^e colonne. Le nombre i est le rang de la ligne considérée alors que le nombre j est le rang de la colonne correspondante. En joignant le point de division 1 de la 1^e ligne horizontale au même point de la 1^e ligne verticale on obtient la base d’un triangle de sommet O. En joignant de même les points 2 et 2, puis 3 et 3 et ainsi de suite on obtient des triangles dont les bases sont de rang 2, 3, ... Toute cellule (i, j) se trouvant dans la base de rang n est telle que $i + j = n + 1$. Par exemple, les cellules $(3, 1)$, $(2, 2)$ et $(1, 3)$ définissent les cellules de la base de rang 3.

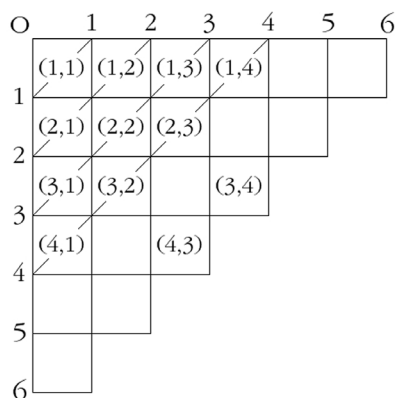


Fig. 1

À chaque cellule (i, j) attribuons maintenant le nombre $c_{i,j}$ selon la règle suivante. ‘Posons $c_{1,1} = 1$ et le nombre de chaque cellule égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui qui la précède dans son rang parallèle.’

Traduite en langage symbolique, la règle devient :

$$\begin{cases} c_{1,j} = c_{i,1} = 1 \text{ pour tout } i \geq 1 \text{ et pour tout } j \geq 1 \\ c_{i,j} = c_{i,j-1} + c_{i-1,j} \end{cases}$$

On obtient ainsi le tableau de la figure 2.

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	
1	3	6	10		
1	4	10			
1	5				
1					

Fig. 2

Pascal donne alors dix-neuf conséquences ou propriétés relatives aux cellules de ce système. Nous nous bornerons ici à démontrer les deux seules qui sont utiles à la résolution du problème des partis. Bien souvent, une mise en évidence de la propriété est préférable à une démonstration formelle. C’est

un point de vue que nous adopterons volontiers par la suite.

Propriété 1

En tout Triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base est double de celles de la base précédente.

En langage symbolique :

$$\sum_{i+j=n+1} c_{i,j} = 2 \cdot \sum_{i+j=n} c_{i,j} \text{ (P1)}$$

En effet, chaque cellule extrême est égale à l'unité et chacune des autres en égale deux de la base précédente. Illustration pour $n = 5$ (figure 3).

Nous conviendrons dès à présent de noter $C_n = \sum_{i+j=n} c_{i,j} = \sum_{i=1}^n c_{(n+1)-i,i}$ la somme des cellules de la base de rang n . Ainsi, dans notre cas

$$\begin{aligned} C_5 &= c_{5,1} + c_{4,2} + c_{3,3} + c_{2,4} + c_{1,5} \\ &= c_{4,1} + c_{4,1} + c_{3,2} + c_{3,2} + c_{2,3} \\ &\quad + c_{2,3} + c_{1,4} + c_{1,4} \\ &= 2 \cdot C_4 \end{aligned}$$

Propriété 2

En tout Triangle arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant hormis une.

En langage symbolique :

$$\sum_{i=1}^k c_{(n+1)-i,i} = 2 \cdot \sum_{i=1}^k c_{n-i,i} - c_{n-k,k} \text{ (P2)}$$

Illustration pour $n = 5$ et $k = 3$ (figure 3)

$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	
$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$		
$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$			
$c_{4,1}$	$c_{4,2}$				
$c_{5,1}$					

Fig. 3

$$\begin{aligned} c_{5,1} + c_{4,2} + c_{3,3} &= \\ &= c_{4,1} + c_{4,1} + c_{3,2} + c_{3,2} + c_{2,3} \\ &= 2 \cdot (c_{4,1} + c_{3,2} + c_{2,3}) - c_{2,3} \end{aligned}$$

Le problème des partis

Imaginons deux joueurs jouant à un jeu de hasard en plusieurs parties (à pile ou face par exemple). Chacun a misé la moitié d'un enjeu total S , et le premier qui a gagné n parties obtient la somme totale S . Or, pour une raison quelconque, le jeu doit être interrompu avant la victoire de l'un d'eux. Il faut alors faire le "parti", c'est-à-dire le partage de l'enjeu total.

Pour résoudre ce problème, Pascal se fonde sur les deux principes suivants.

Principe 1

Si un des joueurs se trouve en telle condition que, quoi qu'il arrive, une certaine somme lui doit appartenir en cas de perte et de gain, sans que le hasard la lui puisse ôter, il n'en doit faire aucun parti, mais la prendre entière comme assurée parce que le parti devant être proportionné au hasard, puisqu'il n'y a nul hasard de perdre, il doit tout retirer sans parti.

Principe 2

Si deux joueurs se trouvent en telle condition que, si l'un gagne, il lui appartiendra une certaine somme, et s'il perd, elle appartiendra à l'autre, . . . , le parti est qu'ils séparent la somme qui est due au

hasard par la moitié, et que chacun prenne la sienne.

De ces deux principes découlent deux règles de calcul équivalentes.

1. Si en cas de perte d'une partie, il revient à un joueur la somme A et si en cas de gain il lui revient la somme $A + B$, le parti est qu'il prenne la somme $A + \frac{1}{2}B$.
2. Sous les mêmes conditions, le parti peut se faire en prenant la demi somme des gains et des pertes, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(A + (A + B))$.

Reformulé en terme de parties fractionnaires, ce 2^e principe s'énonce comme suit : soit un joueur se trouvant dans la situation telle que, s'il gagne la partie suivante il lui revient la fraction $\frac{p_1}{q}$ de la mise totale, et s'il la perd, il lui revient la fraction $\frac{p_2}{q}$. Le parti qu'il doit prendre si les deux joueurs se quittent sans jouer, est $\frac{1}{2}(\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q}) = \frac{p_1 + p_2}{2q}$.

“Ces fondements étant posés, nous passerons aisément à déterminer le parti entre deux joueurs qui jouent en tant de parties qu'on voudra, en quelque état qu'ils se trouvent...”. Or Pascal relève fort judicieusement le fait que c'est le nombre de parties qu'il reste à gagner à chaque joueur pour la victoire qui est déterminant pour le calcul des partis; ce point de vue est essentiel dans la résolution du problème.

Ainsi :

1. s'il manque une partie à chaque joueur, chacun prend la moitié de l'enjeu en vertu du principe 2. Il en est de même s'il manque un même nombre de parties à chaque joueur.
2. S'il manque une partie à l'un des joueurs et deux parties à l'autre, celui à qui il manque une partie prend $\frac{1}{2}(S + \frac{S}{2}) = \frac{3}{4}S$ et l'autre $\frac{1}{4}S$.
3. S'il manque une partie à l'un des joueurs et trois parties à l'autre, celui à qui il manque une partie prend $\frac{1}{2}(S + \frac{3}{4}S) = \frac{7}{8}S$ et l'autre $\frac{1}{8}S$.
4. S'il manque une partie à l'un des joueurs et quatre parties à l'autre, celui à qui il manque une partie prend $\frac{1}{2}(S + \frac{7}{8}S) = \frac{15}{16}S$ et l'autre $\frac{1}{16}S$.
5. S'il manque deux parties à l'un des joueurs et trois parties à l'autre, celui à qui il manque deux parties prend $\frac{1}{2}(\frac{7}{8}S + \frac{1}{2}S) = \frac{11}{16}S$ et l'autre $\frac{5}{16}S$.

Cet ingénieux procédé permet de déterminer, de proche en proche, la répartition sur tous les états du jeu. Mais l'ingéniosité de Pascal ne s'arrête pas là. En effet, Pascal propose deux autres méthodes de calcul des partis, l'une par le triangle arithmétique et l'autre par les combinaisons. Nous allons examiner celle du triangle arithmétique.

Usage du triangle arithmétique pour le calcul des partis

Soient deux joueurs à qui il manque respectivement m et n parties pour obtenir le gain total de la mise. On cherche à déterminer le parti de ce qu'il revient à chacun s'ils décident de se séparer sans jouer.

Proposition

Soit la base de rang $m + n$ du triangle arithmétique, $N = \sum_{i=0}^{n-1} c_{m+n-i,i+1}$ la somme des n premiers éléments de cette base et $M = \sum_{i=n}^{m+n-1} c_{m+n-i,i+1}$ la somme des m derniers éléments de cette même base. Le rapport des partis du premier joueur au second est N/M .

En notant ces deux sommes S_1 et S_2 , on a $\frac{S_1}{S_2} = \frac{M}{N}$ ou $\frac{S_1}{S_1+S_2} = \frac{N}{N+M}$, ce qui représente la fraction qui revient au 1^e joueur relativement à l'enjeu total.

Illustrons d'abord la situation lorsque $m = 2$ et $n = 3$.

On a : $N = c_{5,1} + c_{4,2} + c_{3,3} = 1 + 4 + 6 = 11$, puis $N = c_{2,4} + c_{1,5} = 4 + 1 = 5$.

L'enjeu total se fera selon le rapport 11/5. Le joueur à qui il manque 2 parties prend les 11/16 de la somme S et l'autre les 5/16, comme déjà déterminé plus haut.

Démonstration

La démonstration se fait par induction sur le rang $n + m$ des bases. La propriété est facilement vérifiée la base de rang 2.

Supposons la propriété vraie pour $n + m = 4$ et considérons donc la base de rang 4 constituée des cellules $c_{4,1}$, $c_{3,2}$, $c_{2,3}$ et $c_{1,4}$ (figure 3).

Par hypothèse, s'il manque une partie au 1^e joueur et trois parties au 2^e joueur, le parti des joueurs, exprimé en fraction de la somme totale,

est donné par $\frac{c_{4,1}+c_{3,2}+c_{2,3}}{C_4}$ pour le 1^e joueur et par $\frac{c_{1,4}}{C_4}$ pour le 2^e joueur.

S'il manque deux parties au 1^e joueur comme au 2^e joueur, le parti du 1^e joueur est donné par $\frac{c_{4,1}+c_{3,2}}{C_4}$ pour le 1^e par $\frac{c_{2,3}+c_{1,4}}{C_4}$ pour le 2^e joueur. Enfin, s'il manque trois parties au 1^e joueur et une seule au 2^e joueur, le parti est donné par $\frac{c_{4,1}}{C_4}$ pour le 1^e joueur et par $\frac{c_{3,2}+c_{2,3}+c_{1,4}}{C_4}$ pour le 2^e joueur.

Il faut démontrer maintenant que la 5^e base du triangle arithmétique contient les partis des joueurs auxquels il manque cinq parties en tout.

Si, par exemple, il manque deux parties au 1^e joueur, son parti sera :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{c_{4,1} + c_{3,2} + c_{2,3}}{C_4} + \frac{c_{4,1} + c_{3,2}}{C_4} \right) \\ &= \frac{(c_{4,1} + c_{3,2} + c_{2,3}) + (c_{4,1} + c_{3,2})}{2C_4} \\ &= \frac{2 \cdot (c_{4,1} + c_{3,2} + c_{2,3}) - c_{2,3}}{C_5} \\ &= \frac{c_{5,1} + c_{4,2} + c_{3,3}}{C_5} \end{aligned}$$

en vertu des propriétés (P1) et (P2). Mais cela montre que le parti du 1^e joueur est contenu dans la 5^e base. La vérification des autres cas est laissée au soin du lecteur.

Nous avons choisi de nous baser sur un cas particulier pour mettre en évidence la propriété, car voici l'argumentation de Pascal :

“Ainsi cela se démontre entre toutes les autres bases sans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente, et que tant de cellules qu'on voudra d'une même base sont égales à tant de cellules de la base précédente, plus encore aux mêmes cellules, excepté une; ce qui étant vrai généralement partout, la démonstration sera toujours sans obstacle et universelle”.

Par la solution qu'il donne au problème des partis, Pascal inaugure une nouvelle matière des mathématiques par laquelle il accepte de spéculer sur l'avenir. Sa *Géométrie du hasard* contient en effet les bases du calcul des probabilités, science qui, dès lors, ne cessera de se développer. La grande élégance de ses raisonnements justifie à elle seule le détour chez ce mathématicien fascinant.

Bibliographie

Chevalier Jacques : *Pascal, Œuvres complètes*, Gallimard, Collection La Pléiade 1954
Loeffel Hans : *Vita Mathematica, Blaise Pascal*, Birkhäuser Basel 1987

Flâneries en compagnie d'Euler

Bernard Aymon

Délégué de la CRM auprès du CPS

CE COURS, organisé par la Commission romande de mathématique avec l'appui du CPS, a eu lieu, du 2 au 6 octobre 2000, à Grangeneuve dans une salle de conférences de l'Institut agricole du canton de Fribourg. Il a réuni une trentaine de participants venus essentiellement de Suisse romande (une participante du canton de Lucerne et un participant du canton de Bâle). Pour ce cours, la CRM avait invité MM les Professeurs Jean Dhombres (Université de Nantes, chercheur au CNRS, Centre Koyré à Paris), Alain Robert (Université

de Neuchâtel) et Gerhard Wanner (Université de Genève).

Les conférenciers ont présenté, à l'aide de textes originaux, un choix des innombrables travaux dus à Euler. A l'aide des explications concernant le contexte historique (le Siècle des Lumières, la vie du monde académique, les correspondances entre les grands penseurs de l'époque,...) les participants ont appris à mieux connaître l'origine des concepts et des théories mathématiques et physiques développés par Euler.