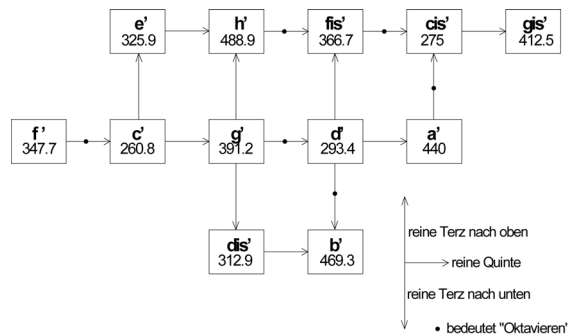


Die musikalische Tonleiter: eine faszinierende Geschichte (zweiter Teil)

Radolf von Salis
Gymnasium Liestal

Die Antwort auf die Frage aus dem Bulletin 84 lautet:
Das nächste Glied in der Folge 1, 2, 7, 12, 53, ... ist **359**

DIE PYTHAGORISCHE Tonleiter enthält 4 fast reine Terzen (auf Seite 25 des Bulletins 84 sollte in der Tabelle auch die grosse Terz beim E fett gedruckt sein), die für das Ohr sehr wohlklingend tönen. Alle anderen Terzen sind zu gross und tönen scharf, wenn nicht gerade "verstimmt". Im 16. Jahrhundert begann man musikalische Tonleitern zu konstruieren, die mehr als 4 reine Terzen enthielten. So stammt beispielsweise der folgende Vorschlag von Johannes Kepler (1571-1630):

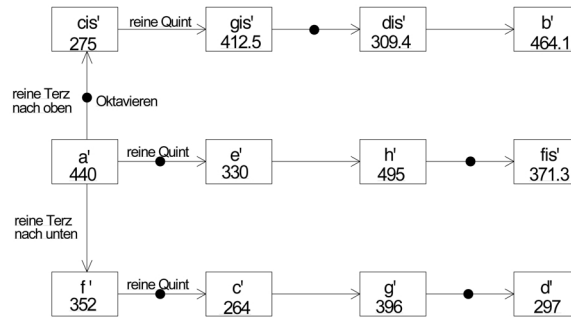


Ausgehend vom Ton f' werden vorerst nach dem pythagoräischen Verfahren die Töne c', g', d' und a' konstruiert. Anschliessend wird eine reine Terz über dem Ton c' der Ton e' definiert. Von diesem Ton ausgehend wird wieder nach dem pythagoräischen Verfahren vorgegangen. Man findet so die Töne h', fis', cis' und gis'. Die beiden fehlenden Töne dis' und b' konstruiert man schliesslich als reine Terz unter g', respektive d'. Diese Tonleiter enthält 9 reine Quinten und 6 reine Terzen. Wie die folgende Tabelle zeigt, sind die restlichen 3 Quinten und 6 Terzen alles andere als rein:

Ton	Frequenz	gr. Terz	Quint
c'	260.8	1.2500	1.5000
cis'	275.0	1.2642	1.5000
d'	293.4	1.2500	1.5000
dis'	312.9	1.2500	1.5000
e'	325.9	1.2655	1.5000
f'	347.7	1.2656	1.5000
fis'	366.7	1.2800	1.5000
g'	391.1	1.2500	1.5000
gis'	412.5	1.2642	1.5171
a'	440.0	1.2500	1.4816
b'	469.3	1.2500	1.4816
h'	488.9	1.2800	1.5000

2 Terzen (bei fis' und h') sind sogar so gross, dass sie eindeutig falsch tönen. Man sprach damals von "Wölfen", weil sie wie solche heulten. Von den 3 unreinen Quinten sind zwei zu klein und eine zu gross. Die Frequenzen der Töne sind so angegeben, dass der Ton a' eine Frequenz von 440,0 Hz erhält. Zur Zeit von Kepler war allerdings der Kammer-A-Ton tiefer.

Der berühmte Orgelbauer Andreas Silbermann (1678-1734) stimmte seine Instrumente nach einem ähnlichen Verfahren. So taten es auch Musiker wie Schlick, Salinas, Werckmeister und andere. Man versuchte möglichst viele reine Terzen und Quinten zu erreichen und Wölfe zu vermeiden. Leonhard Euler (1707-1783) bereitete diesem geheimnisvollen Suchen und Spekulieren ein Ende, indem er bewies, dass höchstens 8 Terzen und 9 Quinten gleichzeitig rein sein können und dass Wölfe nicht vermieden werden können. Seine optimale Lösung sieht folgendermassen aus:



Es fällt auf, dass viele Frequenzen geradzahlig werden. Nur gerade 4 sind nicht geradzahlig. Die zugehörige Frequenztafel zeigt die heulenden Wölfe:

Ton	Frequenz	gr. Terz	Quint
c'	264.0	1.2500	1.5000
cis'	275.0	1.2800	1.5000
d'	297.0	1.2500	1.5000
dis'	309.4	1.2799	1.4815
e'	330.0	1.2500	1.5000
f'	352.0	1.2500	1.5000
fis'	371.3	1.2500	1.5000
g'	396.0	1.2500	1.4815
gis'	412.5	1.2800	1.5000
a'	440.0	1.2500	1.5000
b'	464.1	1.2799	1.5169
h'	495.0	1.2500	1.5000

Die 3 Wolfsquinten sind fast gleich wie bei der Kepler'schen Stimmung. Alle 4 Wolfsterzen heulen fürchterlich. Bei Kepler gab es 4 Terzen, die mit den pythagoräischen Terzen identisch waren. Bei Euler werden 2 davon rein gemacht. Die restlichen zwei verschlechtern sich rettungslos.

Ein Instrument, das nach dem Euler'schen Verfahren gestimmt wurde, heisst "rein" gestimmt. Wenn der Komponist in seiner Komposition jegliche Wölfe ausschliesst, so tönt das Musikstück auf einem rein gestimmten Instrument wahrlich kristallklar und schwebungsfrei. So ist beispielsweise das Praeludium in C Dur von Johann Sebastian Bach (1685-1750) noch so komponiert worden und wird zu einem musikalischen Hochgenuss, falls es auf einem in C Dur rein gestimmten Klavier gespielt wird. Wehe aber, wenn der Spieler dieses Stück in eine andere Tonart transponiert!

Wie man das Dilemma der Wölfe gelöst hat, wird im nächsten und letzten Teil berichtet.