



Le point de concours des symédianes

Jean PIQUEREZ
Collège de Staël, Genève

CETTE étude prend son origine dans un exercice du livre de la C.R.M. : *Géométrie vectorielle et analytique plane*, Fundamentum de mathématique, n° 23. On y lit dans l'exercice 4.103, p. 145 :

“On appelle symédiane issue du sommet A d'un triangle ABC la droite symétrique de la médiane issue de A par rapport à la bissectrice intérieure en A .”

Je me suis alors replongé dans un vieux livre de géométrie synthétique à reliure presque centenaire et aux pages jaunies, héritage de ma mère : “Exercices de Géométrie” par F.G.-M. (alias Frère Gabriel-Marie) récemment réédité chez Gabay.

Il s'agit là d'une mine d'or inépuisable au charme suranné de la géométrie d'antan. On y lit notamment que les symédianes d'un triangle se coupent en un même point, appelé point de Lemoine (1873), et que ses coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux carrés des côtés du triangle.

J'ai voulu retrouver cette concourance à l'aide de la géométrie vectorielle enseignée dans nos lycées.

Soit donc un triangle ABC et posons $\vec{u} = \vec{BC}$, $\vec{v} = \vec{CA}$ et $\vec{w} = \vec{AB}$.

Ainsi, d'après la relation de Chasles, on a $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

C'est le moment de faire deux rappels d'importance :

1. Deux droites de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} ont pour bissectrices deux droites orthogonales de vecteurs directeurs respectifs $\|\vec{u}\|\vec{v} + \|\vec{v}\|\vec{u}$ et $\|\vec{u}\|\vec{v} - \|\vec{v}\|\vec{u}$.
2. Soit un axe Δ de vecteur directeur \vec{v} et une droite d de vecteur directeur \vec{u} . Soit d' la droite symétrique de d par rapport à l'axe Δ . Alors d' a pour vecteur directeur \vec{u}' défini par :

$$\vec{u}' = 2 \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right) \vec{v} - \vec{u}$$

Revenons à notre problème :

La bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC a pour vecteur directeur $\|\vec{w}\|(-\vec{v}) + \|\vec{v}\|\vec{w}$. La médiane issue de A a pour vecteur directeur $\vec{w} - \vec{v}$.

Donc, en vertu du deuxième rappel ci-dessus, la symédiane, notée s_A , a pour vecteur directeur

$$\begin{aligned} \vec{w}' &= 2 \frac{(\vec{w} - \vec{v}) \cdot (\|\vec{v}\|\vec{w} - \|\vec{w}\|\vec{v})}{\|(\|\vec{v}\|\vec{w} - \|\vec{w}\|\vec{v})\|^2} (\|\vec{v}\|\vec{w} - \|\vec{w}\|\vec{v}) - (\vec{w} - \vec{v}) \\ &= \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} + \frac{1}{\|\vec{w}\|} \right) (\|\vec{v}\|\vec{w} - \|\vec{w}\|\vec{v}) - (\vec{w} - \vec{v}) = \lambda \vec{w} - \frac{1}{\lambda} \vec{v} \end{aligned}$$

avec $\lambda = \|\vec{v}\|/\|\vec{w}\|$, tous calculs faits.

Par permutation circulaire, on obtient les vecteurs \vec{v}' et \vec{w}' , vecteurs directeurs des symédianes s_B et s_C :

$$\vec{v}' = \mu \vec{u} - \frac{1}{\mu} \vec{w} \text{ avec } \mu = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|}$$

et

$$\vec{w}' = \rho \vec{v} - \frac{1}{\rho} \vec{u} \text{ avec } \rho = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$$

et l'on remarque que $\lambda\mu\rho = 1$.

Ainsi les équations vectorielles des trois symédianes sont :

$$M \in s_A \iff \det(\vec{AM}; \lambda\vec{w} - \frac{1}{\lambda}\vec{v}) = 0$$

$$M \in s_B \iff \det(\vec{BM}; \mu\vec{u} - \frac{1}{\mu}\vec{w}) = 0$$

$$M \in s_C \iff \det(\vec{CM}; \rho\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{u}) = 0$$

avec les conditions $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ et $\lambda\mu\rho = 1$.

Il s'agit dès lors de démontrer la concourance de ces trois droites.

Si $M \in s_A \cap s_B$ on peut écrire :

$$\exists \alpha \in R \text{ tel que } \vec{AM} = \alpha(\lambda\vec{w} - \frac{1}{\lambda}\vec{v}) \quad (1)$$

$$\exists \beta \in R \text{ tel que } \vec{BM} = \beta(\mu\vec{u} - \frac{1}{\mu}\vec{w}) \quad (2)$$

Or, $\vec{BM} = \vec{AM} - \vec{AB} = \vec{AM} - \vec{w} = \beta\mu(-\vec{v} - \vec{w}) - \frac{\beta}{\mu}\vec{w}$, d'où

$$\vec{AM} = -\beta\mu\vec{v} + \left(1 - \beta\mu - \frac{\beta}{\mu}\right)\vec{w} \quad (3)$$

$[\vec{v}; \vec{w}]$ étant une base vectorielle du plan, les relations (1) et (3) impliquent

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\alpha}{\lambda} = \beta\mu \\ \alpha\lambda = 1 - \beta\mu - \frac{\beta}{\mu} \end{array} \right\} \implies \beta = \frac{\mu}{\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 1} \text{ et } \alpha = \frac{\lambda\mu^2}{\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 1}$$

Donc, dans le repère $(A; \vec{v}; \vec{w})$ le point $M = s_A \cap s_B$ a pour coordonnées :

$$M \left(-\frac{\mu^2}{\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 1}; \frac{\lambda^2\mu^2}{\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 1} \right)$$

On procède de même pour déterminer le point $M' = s_A \cap s_C$:

$$\exists \alpha \in R \text{ tel que } \vec{AM}' = \alpha(\lambda\vec{w} - \frac{1}{\lambda}\vec{v}) \quad (4)$$

$$\exists \gamma \in R \text{ tel que } \vec{CM}' = \gamma(\rho\vec{v} - \frac{1}{\rho}\vec{u}) \quad (5)$$

or, $\vec{CM}' = \vec{AM}' - \vec{AC} = \vec{AM}' + \vec{v} = \gamma\rho\vec{v} + \frac{\gamma}{\rho}(\vec{v} + \vec{w})$, d'où $\vec{AM}' = (\gamma\rho + \frac{\gamma}{\rho} - 1)\vec{v} + \frac{\gamma}{\rho}\vec{w}$ (6).

Ainsi, (4) et (6) impliquent

$$\left. \begin{array}{l} \alpha\lambda = \frac{\gamma}{\rho} \\ -\frac{\alpha}{\lambda} = \gamma\rho + \frac{\gamma}{\rho} - 1 \end{array} \right\} \implies \alpha = \frac{\lambda}{\lambda^2\rho^2 + \lambda^2 + 1} \text{ et } \gamma = \frac{\rho\lambda^2}{\lambda^2\rho^2 + \lambda^2 + 1}$$

Ainsi dans le repère $(A; \vec{v}; \vec{w})$ le point $M' = s_A \cap s_C$ a pour coordonnées :

$$M' \left(-\frac{1}{\lambda^2\rho^2 + \lambda^2 + 1}; \frac{\lambda^2}{\lambda^2\rho^2 + \lambda^2 + 1} \right).$$

Il reste à montrer que M et M' coïncident, ce qui se fait sans difficulté en tenant compte du fait que $\lambda\mu\rho = 1$.

Exemple numérique

Soit le triangle OAB avec $A(9; 0)$ et $B(0; -12)$. On peut alors montrer que les trois symédianes ont pour équations :

$$s_O : 3x + 4y = 0$$

$$s_A : 6x - 17y = 54$$

$$s_B : 41x - 12y = 144$$

et qu'elles concourent au point $P(2, 88; -2, 16)$.

