

Die musikalische Tonleiter: eine faszinierende Geschichte (letzter Teil)

Radolf von Salis
Gymnasium Liestal

UM die "scharfen" Terzen der Pythagoräischen Tonleiter zu vermeiden wurden im 16. und 17. Jahrhundert Stimmungen benützt, die möglichst viele reine Terzen und reine Quinten enthielten. Die restlichen Terzen und Quinten waren derart verstimmt, dass man sie als "Wölfe" bezeichnete. Gleichzeitig begann man aber auch Instrumente so zu stimmen, dass man gänzlich auf reine Tonintervalle verzichtete, dafür aber die Gleichheit aller gleichnamigen Tonintervalle anstrebte. Da ein Tonintervall ein Frequenzverhältnis darstellt, muss Verhältnis zwischen den Frequenzen von zwei aufeinanderfolgenden Tönen über die ganze Tonleiter gleich gemacht werden.

Bezeichnen wir die Frequenz des tiefsten Tones in der Oktave mit t (Grundton) und das Frequenzverhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden

den Tönen mit k , so wird die Tonleiter durch die **geometrische Folge** $t, t \cdot k, t \cdot k^2, t \cdot k^3, \dots$ dargestellt. Behält man gemäss Pythagoras **12 Töne pro Oktave** bei, so wird die Frequenz des Tones t' , der eine Oktave über dem Grundton erklingt, gemäss $t' = t \cdot k^{12}$ berechnet. Behält man auch noch die **Reinheit der Oktave** bei, so ist $t' = 2t$ und $k^{12} = 2$. Daraus folgt für das gesuchte Frequenzverhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tönen:

$$k = \sqrt[12]{2} = 1.059463\dots$$

Mit dem Kammerton a' bei 440 Hz erhält man nach diesem Verfahren die folgende Tonleiter:

Ton	c'	cis'	d'	dis'	e'	f'	fis'	g'	gis'	a'	b'	h'
Frequenz	261.6	277.2	293.7	311.1	329.6	349.2	370.0	392.0	415.3	440.0	466.1	493.9

Die grosse Terz ist ein Intervall von 4 "Halbtönen", also ein Frequenzverhältnis von $k^4 = \sqrt[3]{2} = 1.2599\dots$ Diese Terz ist um rund 8 Promille grösser als die reine Terz. Die "scharfe" Pythagoräische Terz mit ihrem Frequenzverhältnis von 1.2656 ist rund 12 Promille grösser als die reine Terz. Die so gewonnene "wohltemperierte" Terz ist also näher bei der Pythagoräischen als bei der reinen Terz!

Die Quint ist ein Intervall von 7 "Halbtönen", stellt also das Frequenzverhältnis $k^7 = \sqrt[12]{2^7} = 1.4983\dots$ dar. Sie ist nur geringfügig kleiner als die reine Quint. Der Unterschied beträgt bloss rund 1 Promille.

Werden die Töne von einem Musikinstrument erzeugt, so kommen auch Obertöne mit, die reine Intervalle über dem Grundton bilden. Werden

zwei Töne gleichzeitig gespielt, z. B. als Quint, so kommt es auch zur Ueberlagerung zwischen ihren Obertönen. Als Beispiel werde der Ton c' zusammen mit dem Ton g' gespielt. Der zweite Oberton von c' hat die Frequenz $3 \cdot 261.6 \text{ Hz} = 784.9 \text{ Hz}$. Der erste Oberton von g' hat die Frequenz $2 \cdot 392.0 \text{ Hz} = 784.0 \text{ Hz}$. Da diese beiden Töne fast die gleiche Frequenz haben (aber nicht exakt die gleiche), entstehen **Schwebungen in der Lautstärke**. Die Amplitude wird in Abständen von 0.9 s leiser und lauter. Jede Quint erzeugt in dieser Stimmung Schwebungen, allerdings mit unterschiedlichen Frequenzen. Bei der reinen Stimmung gibt es Intervalle, die schwebungsfrei erklingen. Andere Intervalle dieser Stimmung (die Wölfe) erzeugen dafür so rasche Schwebungen, dass das Ohr negativ überrascht wird.

Man bezeichnet die neue Stimmung als “**wohltemperiert**” oder als “**gleichschwebend**”. Nur die Oktave ist darin rein. Alle anderen Intervalle sind unrein, aber eben nur so wenig unrein, dass die dadurch entstehenden Schwebungen die musikalische Darbietung bereichern. Der Komponist kann in der wohltemperierten Stimmung alle möglichen Tonarten verwenden. Man hört nie mehr den Wolf heulen. Den schwebungsfreien, kristallklaren Klang der reinen Stimmung hat man allerdings aufgegeben. Johann Sebastian Bach hat in seiner Jugend nur Stücke komponiert, die auf rein gestimmten Instrumenten gespielt wurden. Ein typisches Beispiel dafür ist das Präludium in C-Dur, das auf einem rein gestimmten Cembalo so schwebungsfrei klingt, dass der moderne Zuhörer davon überrascht wird. Unser Ohr hat sich eben an die wohltemperierte Stimmung mit ihren Schwebungen gewöhnt. Im reifen Alter hat

Johann Sebastian Bach mit seinen Musikstücken aus den “wohltemperierten Klavieren”, wesentlich zur Verbreitung der wohltemperierten Stimmung beigetragen. Heute werden nahezu alle Instrumente so gestimmt.

Man könnte nach demselben Schema eine wohltemperierte Tonleiter mit beispielsweise 10 Tönen konstruieren. Man kann aber mathematisch leicht zeigen, dass man mit einer solchen Tonleiter kaum polyphon musizieren könnte. Ueberraschenderweise erweist sich die 12 - Ton - Leiter, die ihren Ursprung bei Pythagoras hat, als die einzige praktische Tonleiter, mit der polyphon musiziert werden kann. Wir stehen hier nochmals vor einem Naturwunder, den bereits die alten Griechen aufgespiert hatten. Die Zahl 12 hat eine fast magische Ausstrahlung!

Arbeitsgruppe Fachdidaktik Physik

WBZ-Kurs 01.05.31

Dienstag, 27. Dezember 2001; Universität, Bern

Maturaarbeit in Physik

Konzepte - Beispiele - Rahmenbedingungen - Maturaarbeiten im
“International Baccalaureat”

Arbeitsgruppe Fachdidaktik Physik

Vorankündigung WBZ-Kurs 2002

Eine Woche früher als angekündigt: Mittwoch - Freitag, 6. - 8. März 2002
Hauptgebäude ETH-Zürich und Fachhochschule Rapperswil

Physik und Anwendungen der Mathematik II

Spezielle Relativitätstheorie - Methode der Finiten Elemente -
Datenerfassung