Algebrafähige Taschenrechner und die Kettenlinie

Urs Oswald

Inhaltsverzeichnis

1 The Unreasonable Effectiveness of Mathematics

SO HIESS DER TITEL eines Vortrages, den P. Bolli 1995 im Rahmen des Kolloquiums für Mathematik, Informatik und Unterricht an der ETH Zürich hielt. Er knüpfte damit an einen Artikel an, den der amerikanische Physiker Eugene Paul Wigner (1902 – 1995, Nobelpreisträger 1963) 1960 veröffentlicht hatte. Bolli bereicherte seinen Vortrag mit einer Reihe eindrücklicher Demonstrationen real existierender Ketten, welche die mathematisch hergeleiteten Phänomene mit faszinierender Präzision bestätigten. (Meine Erinnerung an diesen begeisternden Vortrag wird einzig von der Erinnerung leicht getrübt, dass Bolli dazu überredet wurde, auf Deutsch statt in seiner Muttersprache, Französisch, zu sprechen.) Der Vortrag ist auch in der Reihe der „Berichte über Mathematik und Unterricht“ als No. 95–05 erschienen. Bolli stützte sich für die Durchführung der Berechnungen auf „Mathematica“ sowie nicht ganz unbeträchtliche Rechenfähigkeiten von Schülern und Lehrern. Es ist wohl angebracht, heute der Frage nachzugehen, ob und wie ein algebrafähiger Taschenrechner die Behandlung der Kettenlinie erleichtert. Als Versuchsobjekt diente mein Ende 1999 erworbener und seither nicht „nachgerüsteter“ TI-89.

2 Die Gleichung der Kettenlinie

Die ideale Kette ist

- vollkommen biegsam,
- vollständig unelastisch,
- unendlich dünn.

Die Biegsamkeit hat zur Folge, dass in der Kette nur *tangentiale* Kräfte auftreten können. Die Abwesenheit jeglicher Elastizität ermöglicht die Definition einer Dichte in der Form

$$\rho = \frac{\text{Masse}}{\text{Länge}}.$$

Betrachtet man ein Segment einer Kette in Ruhelage, so befinden sich die beiden Zugkräfte an den Enden mit der Gewichtskraft im Gleichgewicht:

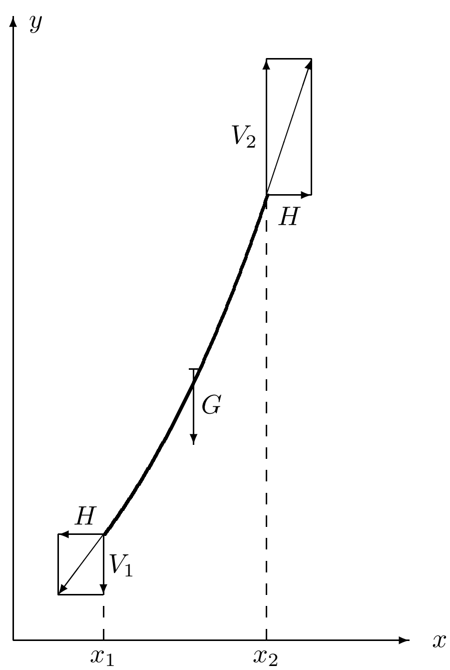

Abb. 1: Das Kräftegleichgewicht

Somit haben die Horizontalkomponenten denselben Betrag H und erfüllen die Vertikalkomponenten die Beziehung $V_2 - V_1 = G$. Mit $V_1 = Hy'(x_1)$, $\quad V_2 = Hy'(x_2)$ und

$$G = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad \text{folgt}$$

$$H(y'(x_2) - y'(x_1)) = \rho g \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Mit $a := \frac{H}{\rho g}$ ergibt sich durch beidseitiges Ableiten nach der oberen Grenze x_2 und Übergang von x_2 zu x die *Differenzialgleichung der Kettenlinie*:

$$\boxed{ay''(x) = \sqrt{1+(y'(x))^2}.} \tag{1}$$

3 Lösen der Differenzialgleichung

Mit der Substitution $z := y'$ wird (1) zu

$$az'(x) = \sqrt{1+(z(x))^2}.$$

Die eigenhändige Lösung dieser Differenzialgleichung bleibt wohl den Freaks vorbehalten (jedenfalls an den Gymnasien mit sprachlichem Profil). Mit der Eingabe

```
deSolve(a*z'=√(z^2+1),x,z)
```

liefert der TI-89

$$\ln\left(\sqrt{z^2+1}+z\right) = \frac{x}{a} + @1.$$

Die *Nebenbedingung* $z(0) = y'(0) = 0$, welche besagt, dass die Kurve an der Stelle $x = 0$ eine waagrechte Tangente haben soll, hat $@1 = 0$ zur Folge. Somit bleibt

$$\ln\left(\sqrt{z^2+1}+z\right) = \frac{x}{a}. \tag{2}$$

Auch der Nicht-Freak kann diese Gleichung nach z auflösen. Er oder sie braucht dazu

- die Kenntnis der Logarithmusdefinition,
- das Lösen einer einfachen Wurzelgleichung,
- die Lösungsformel der quadratischen Gleichung.

Der TI-89 erledigt die Sache jedoch umgehend. Mit der Eingabe

```
solve(ln(√(z^2+1)+z)=x/a,z)
```

erhält man die Antwort $z = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$, also

$$y'(x) = \sinh\frac{x}{a}. \tag{3}$$

Auch wer noch nie von den Hyperbelfunktionen gehört hat, kann die Integration der Differenzialgleichung sofort zu Ende führen. Die Eingabe

```
∫(sinh(x/a),x)
```

führt auf $a\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$. Somit lautet die *Gleichung der Kettenlinie*

$$\boxed{y = a\cosh\frac{x}{a}.} \tag{4}$$

Äquivalent damit ist die Gleichung

$$\frac{y}{a} = \cosh\frac{x}{a},$$

welche zeigt, dass die Kettenlinie (4) durch eine zentrale Streckung mit dem Faktor a aus der „Normalkettenline“ $y = \cosh x$ hervorgeht, dass somit alle Kettenlinien *untereinander ähnlich* sind.

4 Segmentlänge

Bei der Berechnung bestimmter Integrale, in denen Hyperbelfunktionen vorkommen, hat der TI-89 Mühe. Zum Beispiel führt die Eingabe

```
∫(cosh(x),x,a,b)
```

zum unerfreulichen Ergebnis

$$\frac{1}{2}\left(-e^{-a-b}\left(e^{2a+b} - e^{a}\left(a^{2b}-1\right) - e^{b}\right)\right).$$

Unbestimmte Integrale werden hingegen gut verarbeitet. Die Eingabe

```
∫(√(1+(sinh(x/a))^2),x)
```
(5)

(bei der wir uns auf (3) stützen) resultiert in $a\cdot\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$, somit schliessen wir

$$\begin{aligned} L_{1,2} &= \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx \\ &= a\left(\sinh\frac{x_2}{a} - \sinh\frac{x_1}{a}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

5 Ketten konstanter Länge vom Scheitel aus

P. Bolli untersucht den geometrischen Ort der Ketten konstanter Länge, welche vom Scheitel ausgehen:

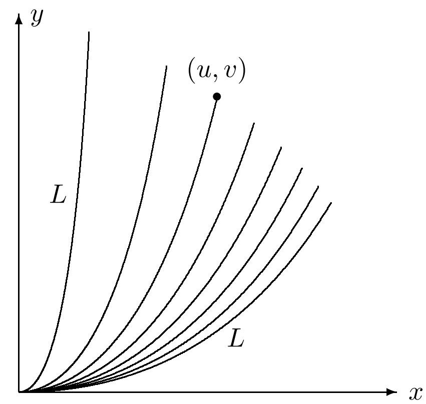

Abb. 2: Ketten konstanter Länge

Bei der Verschiebung des Ursprungs in den Scheitel wird die Gleichung (3) zu

$$y = a\cosh\frac{x}{a} - a = a\left(\cosh\frac{x}{a} - 1\right).$$

Beträgt die Kettenlänge L und wird der Endpunkt mit (u, v) bezeichnet, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (6) das Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcl} v + a &=& a\cosh\dfrac{u}{a} \\[2ex] L &=& a\sinh\dfrac{u}{a} \end{array}\right. \tag{7}$$

Der TI-89 kann daraus nicht einfach a eliminieren. (Oder findet jemand einen direkten Weg?) Der Mathematiker weiss jedoch, dass $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Deshalb folgert er aus (7)

$$(v+a)^2 - L^2 = a^2.$$

Nun kann der TI-89 in Aktion treten. Die Befehlsfolge

```
solve((v+a)^2-L^2=a^2,a)
-(v^2–L^2)/(2*v)→a
solve(a*sinh(u/a)=L,u)
```

ergibt zwei Möglichkeiten, je nachdem $\frac{v+L}{v-L}$ positiv oder negativ ist. (Um die Verwechslung von l mit 1 zu vermeiden, habe ich in den Befehlen L statt l verwendet. Der TI-89 macht intern keinen Unterschied und verwendet in der Ausgabe immer Kleinbuchstaben.) In unserem Fall ist die zweite Möglichichkeit zu verwenden; das Ergebnis ist laut TI-89

$$u = \frac{(v+L)(v-L)\ln\frac{-(v-L)}{v+L}}{2v}. \tag{8}$$

Um ein sinnvolleres Resultat zu erhalten, muss der Schüler immerhin wissen, dass $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$. Dann ist u gefunden:

$$u = \frac{L^2 - v^2}{2v} \ln \frac{L+v}{L-v}. \tag{9}$$

Der algebrafähige Rechner erspart uns hier einiges, bringt uns aber zugleich um einige ebenso nützliche wie reizvolle Rechenübungen.

Der zweite Faktor lässt sich mit der Ungleichung $\ln\frac{1+x}{1-x} \geq 2x$ abschätzen, welche für $|x| < 1$ gilt. Die Ungleichung selbst folgt sofort daraus, dass $\ln\frac{1+x}{1-x}$ die Ableitung $\frac{2}{1-x^2}$ hat, was der Taschenrechner nebenei sofort liefert. Nun gilt

$$\ln\frac{L+v}{L-v} = \ln\frac{1+\frac{v}{L}}{1-\frac{v}{L}} \geq 2\frac{v}{L}$$

und somit

$$u \geq \frac{L^2 - v^2}{2v} \cdot 2\frac{v}{L} = \frac{L^2 - v^2}{L} = L - \frac{v^2}{L}. \tag{10}$$

Die Kettenendpunkte liegen also zwischen einem Kreisbogen und einer quadratischen Parabel.

Der TI-89 erlaubt uns, den Vorgang zu modellieren. Das folgende Programm zeichnet die Ketten mit der Grenzkurve für die Länge 1 für $a = 0.1, 0.2, \ldots, 1.2$ sowie die begrenzenden Kreis und Parabel.

```
kette1()
Prgm
Local a
0→xmin: 0→ymin
2→xmax: 1→ymax
.1→xscl: .1→yscl
FnOff
ClrDraw
DrawInv (1–x^2)/2/x∗ln((1+x)/(1–x))
For a,.1,1.2,.1
  DrawFunc a∗(cosh(x/a)–1)
EndFor
DrawFunc √(1–x^2)
DrawInv 1–x^2
EndPrgm
```

6 Kette gegebener Länge zwischen zwei Punkten

Mit Translation und zentraler Streckung lässt sich das Problem reduzieren auf den Fall einer Kette der Länge $L = 1$, welche zwischen den Endpunkten $(0, 0)$ und (x_1, y_1) hängt.

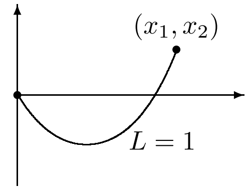

Abb. 3: Kette gegebener Länge

Zur Lösung des verbleibenden Problems muss die Kettenlinie (4) einer Translation $\binom{u}{v}$ unterworfen werden. Dadurch entsteht der Ansatz

$$\frac{y-v}{a} = \cosh\frac{x-u}{a}.$$

Gesucht sind a, u, v so, dass für gegebene x_1, y_1

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & a\cosh\frac{-u}{a} + v, \\ y_1 & = & a\cosh\frac{x_1-u}{a} + v, \\ 1 & = & a\left(\sinh\frac{x_1-u}{a} - \sinh\frac{-u}{a}\right), \end{array}\right. \tag{11}$$

unter den Voraussetzungen

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 < 1, \\ x_1 > 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Möglicherweise lässt sich das Gleichungssystem (11) *numerisch* direkt mit dem TI-89 lösen. Da ich jedoch aus Abb. 3 ein Applet machen wollte, versuchte ich zur Bestimmung von a selbst einen Algorithmus zu finden. Dies gelang nach einigem Herumprobieren „von Hand“ und führte zur Beziehung

$$a = \frac{\frac{x_1}{2}}{\operatorname{areasinh}\left(\frac{1}{2a}\sqrt{1-y_1^2}\right)}. \tag{13}$$

Für den Fall $(x_1, y_1) = (0.8, 0.1)$ lautet (13) zum Beispiel

$$a = \frac{0.4}{\operatorname{areasinh}\left(\frac{1}{2a}\sqrt{0.99}\right)}.$$

Diese Gleichung lässt sich mit dem TI-*82* lösen:

```
solve(.4/sinh⁻¹(.5/A∗√.99)-A,A,1)
```

ergibt nach ca. 3 Sekunden den Wert *0.342 241 378 3*. Auf dem TI-89 hatte ich weniger Glück. Nach mehreren Fehlversuchen gab ich es auf, die Gleichung direkt zu lösen.

Die Folge a_0, a_1, ... mit der rekursiven Definition

$$a_n = \frac{\frac{x_1}{2}}{\operatorname{areasinh}\left(\frac{1}{2a_{n-1}}\sqrt{1-y_1^2}\right)} \tag{14}$$

für $n = 1, 2, \ldots$ ist für jeden Anfangswert $a_0 > 0$ konvergent, sofern die Voraussetzungen (12) erfüllt sind, und der Grenzwert ist die einzige positive Lösung von (13). Das Programm „kette2" berechnet den Grenzwert mit der Genauigkeit der internen Vergleichstoleranz und gibt die Anzahl der nötigen Schritte an. Es werden dabei die Abkürzungen

$$\begin{cases} s &:= \frac{x_1}{2} \\ w &:= \frac{1}{2}\sqrt{1-y_1^2} \end{cases}$$

benützt. Einige Resultate sind:

x_1	y_1	n	a
0.8	0.1	89	0.342 241 378 313
0.7	0.7	569	1.008 280 028 95
0.702	0.702	890	1.192 700 965 29

```
kette2()
Prgm
Local x01,y01,a,b,n,s,w
Prompt x01,y01
x01/2→s
.5*√(1–y01^2)→w
1→a
0→b
0→n
While a≠b
  n+1→n
  a→b
  s/(sinh⁻¹(w/a))→a
EndWhile
Disp a
Disp n
EndPrgm
```

Die anschliessende Berechnung von u und v ist problemlos. Aus (11) folgt wegen $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\sinh\frac{x-y}{2}$

$$y_1 = 2a\sinh\frac{x_1}{2a}\sinh\frac{x_1-2u}{2a},$$

$$\sinh\frac{x_1-2u}{2a} = \frac{\frac{y_1}{2}}{a\sinh\frac{x_1}{2a}}, \qquad \text{also}$$

$$u = \frac{x_1}{2} - a\operatorname{areasinh}\frac{\frac{y_1}{2}}{a\sinh\frac{x_1}{2a}} \tag{15}$$

Schliesslich folgt aus der ersten Gleichung von (11)

$$v = -a\cosh\frac{u}{a}. \tag{16}$$

Ersetzt man im Programm „kette2" die Befehle der zweit- und der drittletzten Zeile gemäss (15) und (16) durch

```
y01/2/a/sinh(s/a)→t
s–a*sinh⁻¹(t)→u
⁻a*cosh(u/a)→v
FnOff
ClrDraw
0→xmin: ⁻.5→ymin
2→xmax: .5→ymax
.1→xscl: .1→yscl
DrawFunc a*cosh((x–u)/a)+v
Circle 0,0,.02
Circle x01,y01,.02
```

so zeichnet das Programm nach der Eingabe von (x_1, y_1) die dazugehörige Kettenlinie.

7 Bézierkurven und Kettenlinie

Mein mathematisches Gewissen drängt mich zum Eingeständnis, dass die Kurven in diesem Artikel keine Kettenlinien sind. Es sind Bézierkurven der einfachsten Art, d.h. durch drei Punkte bestimmte, und für diese bietet LaTeX einen bequemen Grundbefehl. Die Abweichung der Ordinaten ist jedoch so gering, dass sie auch bei zehnfacher Vergrösserung noch kaum zu bemerken wäre; sie liegt unter einem Prozent.

8 Fazit

Bei der Herleitung der Kettengleichung (4) aus der Differenzialgleichung (1) macht der CAS-Rechner mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten weitgehend überflüssig. Dadurch ermöglicht er die Behandlung eines klassischen mathematischen Modells und die frappante Demonstration der „unreasonable effectiveness of mathematics“ auch dann, wenn für die technischen Details die Zeit fehlt. Der Weg vom physikalischen Gesetz über die Differenzialgleichung zur Gleichung kann ohne die Stolpersteine handwerklicher Schwierigkeiten beschritten werden. Immerhin führt auch in diesem Fall eine vollkommen mechanische Lösung nicht zum Ziel. Der Mathematiker (die Mathematikerin) muss an zwei Stellen dem Rechner gewissermassen unter die Arme greifen: bei der Substitution von $z(x)$ für $y'(x)$ und beim Nullsetzen der Integrationskonstanten @1.

Eindrücklich bewährt sich der CAS-Rechner auch bei der Berechnung der Bogenlänge. Nötig ist nur die Kenntnis der allgemeinen Formel; auf Grund von (3) und der Eingabe (5) erledigt der Rechner den Rest. Nicht einmal Kenntnisse der Hyperbelfunktionen sind nötig. Man kann darin einen Nachteil sehen, umgekehrt aber auch den Vorteil einer natürlichen Motivation zur Untersuchung dieser Funktionen.

Bei der Lösung des Gleichungssystems (7) sieht es anders aus. Ohne die Weichenstellungen des Mathematikers verrennt sich der Rechner und bleibt stecken. Zwar „weiss“ er, dass $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, aber er kann im Gegensatz zum Mathematiker nicht „sehen“, dass deshalb $(v+a)^2 - L^2$ eine Schlüsselrolle spielt. Bei der endgültigen Bereinigung von (8) zeigt sich ein typisches Phänomen: Die Zielsetzung, das Resultat auf kanonische Form zu bringen, ist dem Rechner nur schwer mitteilbar und erfordert allenfalls proprietäre CAS-Akrobatik. Kanonische Formen sind aber entscheidend für das inhaltliche Verständnis.

Auch zur Herleitung von (10) kann der Rechner nicht viel beitragen, ausser dass er nebenbei und sofort die Ableitung von $\ln \frac{1+x}{1-x}$ liefert. Der Mathematiker sieht sich hier auf seine eigenen Fähigkeiten verwiesen. Bei der graphischen Darstellung mit dem Programm „kette2“ erweist sich der Befehl „DrawInv“ als sehr nützlich, da die Grenzkurve (9) in der inversen Form $x(y)$ gegeben ist.

So wie der Schritt von (8) zu (9) und von (9) zu (10), beruht auch die Herleitung von (13) aus (11) auf einer dem Taschenrechner nur schwer mitteilbaren Zielsetzung. Dazu kommt, dass der TI-89 für den Umgang mit den Hyperbelfunktionen nicht so gut gerüstet scheint wie für den Umgang mit den trigonometrischen Funktionen. Es scheint fast aussichtslos, auf rein mechanischem Weg von (11) zu brauchbaren Resultaten zu kommen. – Wer widerlegt diese Behauptung?

9 Hinweis

Aus Platzgründen ist die Herleitung von (13) weggelassen worden. Auf der Internet-Ausgabe des Bulletins (http://www.vsmp.ch) ist sie beigefügt. Ebenso werden dort die Kräfteverhältnisse an der Kettenline durch einige Applets illustriert.

Korrespondenz: Urs Oswald
Nordstrasse 292, 8037 Zürich
osurs@bluewin.ch