

De la banalité peut jaillir l'intérêt

Jean Piquerez

Collège du Staël, Genève

DANS LE FUNDAMENTUM de mathématiques "Analyse", monographie N° 25 de la CRM, on peut lire en page 135, exercice 4.32 :

1) Calculer le plus grand écart vertical entre les graphes des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{x^2}{8}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

avec $0 \leq x \leq 4$. On trouve $l_{max}^x = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} \approx 0,945$.

J'y rajoutai, pour mes élèves, la question suivante :

Calculer le plus grand écart horizontal entre les mêmes graphes.

C'était l'occasion d'exprimer les fonctions réciproques et l'on était alors ramené à l'exercice précédent avec :

$${}^r f(y) = 2\sqrt{2y}, \quad {}^r g(y) = y^2$$

avec $0 \leq y \leq 2$. On trouve $l_{max}^y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = 2l_{max}^x$

Et ce fut le début d'une longue suite d'interrogations.

En est-il toujours ainsi, quelles que soient les fonctions des familles du type :

$$f_a(x) = ax^2 \quad \text{et} \quad g_b(x) = \sqrt{bx}$$

avec $a > 0$ et $b > 0$?

La réponse est négative.

Un élève me demanda alors s'il n'y avait pas un lien avec le rapport des coordonnées du point d'intersection (4;2) de f avec g , constatant que ce rapport vaut 2. Je répondis sans trop y croire que ce n'était

pas exclu. Mais il ne faut pas sous-estimer l'intuition des élèves "faibles".

Alors, allons-y :

Soient $f_a(x) = ax^2$ et $g_b(x) = \sqrt{bx}$.

$$\begin{aligned} f_a(x) = g_b(x) &\Leftrightarrow ax^2 = \sqrt{bx} \Leftrightarrow a^2 x^4 = bx \\ &\Leftrightarrow x(a^2 x^3 - b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = b^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Si $x = 0$, $y = 0$ et, si $x = b^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}}$, $y = a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$, les deux points d'intersection sont : $O(0;0)$ et $P(b^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{2}{3}}; a^{-\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}})$.

On observe que $\frac{x_P}{y_P} = (ab)^{-\frac{1}{3}}$.

Maximalisons le segment vertical $M_1 M_2$:

$$\begin{aligned} M_1 M_2 = l(x) &= g(x) - f(x) \\ \Rightarrow l'(x) = g'(x) - f'(x) &= \frac{b^{\frac{1}{2}} - 4ax^{\frac{3}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{max} = \left(\frac{b}{16a^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ d'où } l_{max}^x = \frac{3b^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}}.$$

Maximalisons le segment horizontal $N_1 N_2$:

$$\begin{aligned} N_1 N_2 = l(y) &= {}^r f(y) - {}^r g(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{b} \\ \Rightarrow l'(y) = ({}^r f)'(y) - ({}^r g)'(y) &= \frac{b - 4a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}} b y^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$l'(y) = 0 \Leftrightarrow y_{max} = \left(\frac{b^2}{16a}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ d'où } l_{max}^y = \frac{3b^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}}.$$

On observe alors que $\frac{l_{max}^y}{l_{max}^x} = (ab)^{-\frac{1}{3}} = \frac{x_P}{y_P}$.

Bravo l'élève!

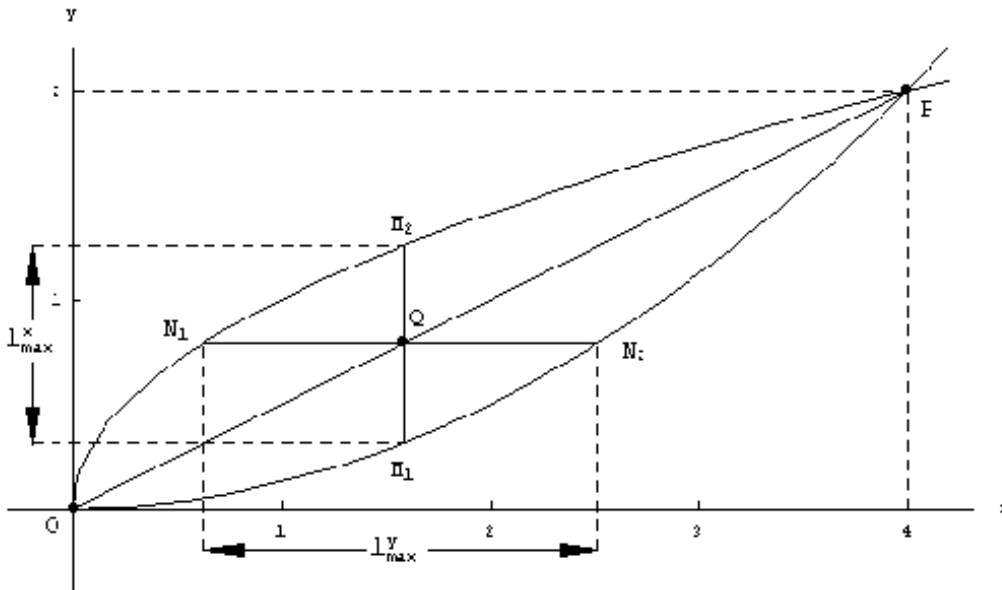


Illustration avec $b = 1$ et $a = \frac{1}{8}$.
 Dans le cas présent, on a

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{l^y_{max}}{l^x_{max}} = 2 \text{ et } \frac{OQ}{OP} = 2^{-4/3} \approx 0,4$$

Mais intéressons-nous d'un peu plus près au point Q , intersection des deux segments maximaux N_1N_2 et M_1M_2 . Quelle question naturelle le mathématicien peut et doit-il se poser? Q appartient-il ou non au segment $[OP]$? Bien sûr.

Et rebelote.

La droite (OP) a pour équation: $y = \frac{y_P}{x_P}x \Leftrightarrow y = (ab)^{\frac{1}{3}}x$.

Le point Q a pour coordonnées:

$$\left(\left(\frac{b}{16a^2} \right)^{\frac{1}{3}} ; \left(\frac{b^2}{16a} \right)^{\frac{1}{3}} \right)$$

et l'on vérifie aisément qu'elles satisfont l'équation de (OP) .

Quelle autre question "essentielle" ledit mathématicien pourrait-il encore se poser?

Le rapport $\frac{OQ}{OP}$ est-il constant? Bien entendu.

Et "rerebelote":

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{x_Q}{x_P} \text{ par Thalès et } \frac{x_Q}{x_P} = \frac{1}{4^{\frac{2}{3}}} \approx 0,397.$$

Conclusion: Le rapport des longueurs des deux segments maximaux est égal à celui des coordonnées

du point P , le point Q d'intersection de ces deux segments est situé sur (OP) et $\frac{OQ}{OP} \approx 2^{-\frac{2}{3}}$.

Etonnant, non?

Nouvelle question: mais pourquoi, diable, se limiter à des fonctions du econd degré? Envisageons donc les deux familles de fonctions suivantes:

$$f_a : x \mapsto ax^n \text{ et}$$

$$g_b : x \mapsto \sqrt[n]{bx}$$

avec $a > 0, b > 0$ et $n \geq 2$, entier.

Alors $f_a(x) = g_b(x) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \left(\frac{b}{a^n}\right)^{\frac{1}{n^2-1}}$ et le point d'intersection P est de coordonnées:

$$\left(\left(\frac{b}{a^n} \right)^{\frac{1}{n^2-1}} ; a \left(\frac{b}{a^n} \right)^{\frac{n}{n^2-1}} \right),$$

le rapport $\frac{x_P}{y_P}$ des deux coordonnées étant

$$\frac{x_P}{y_P} = (ab)^{-\frac{1}{n+1}}$$

$$l(x) = (bx)^{\frac{1}{n}} - ax^n \Rightarrow l'(x) = \frac{b}{n(bx)^{\frac{n-1}{n}}} - nax^{n-1}$$

$$l'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left(a^{-1}n^{-2}b^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{n^2-1}}$$

D'où

$$l_{max}^x = a^{-\frac{1}{n^2-1}} \cdot b^{\frac{n}{n^2-1}} \cdot n^{\frac{-2n^2}{n^2-1}} \cdot (n^2 - 1)$$

après de fastidieux calculs.

$${}^r f_a(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ et } {}^r g_b(y) = \frac{y^n}{b},$$

d'où

$$l(y) = \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{y^n}{b} \Rightarrow l'(y) = \frac{1}{na} \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}} - \frac{ny^{n-1}}{b}$$

$$l'(y) = 0 \iff y = (b^1 n^{-2} a^{-\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n^2-1}}.$$

D'où

$$l_{max}^y = b^{\frac{1}{n^2-1}} \cdot a^{\frac{-n}{n^2-1}} \cdot n^{\frac{-2n^2}{n^2-1}} \cdot (n^2 - 1).$$

Ainsi :

$$\frac{l_{max}^y}{l_{max}^x} = a^{\frac{-n+1}{n^2-1}} \cdot b^{\frac{1-n}{n^2-1}} = (ab)^{-\frac{1}{n+1}} = \frac{x_P}{y_P}.$$

Les points O , Q et P continuent-ils d'être alignés ?
 $Q(x_Q; y_Q)$ de sorte que : $\frac{y_Q}{x_Q} = (ab)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{y_P}{x_P}$. Oui.

Quel est le rapport $\frac{OQ}{OP}$? C'est le même que le rapport $\frac{x_Q}{x_P}$, c'est-à-dire :

$$\frac{x_Q}{x_P} = \frac{(a^{-1} n^{-2} b^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n^2-1}}}{(b^{\frac{1}{n}} a^{-1})^{\frac{n}{n^2-1}}} = n^{-\frac{2n}{n^2-1}}$$

Ainsi le rapport est indépendant de a et de b , pour tout $n \geq 2$, entier, mais dépend de n et vaut :

$$n^{-\frac{2n}{n^2-1}}$$

Remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{2n}{n^2-1}} = 1.$$

Ainsi, plus l'exposant est élevé, plus le point Q se rapproche de P sur le segment $[OP]$.

P.S. Après coup, je me suis rendu aperçu que l'exercice 4.32, page 135, évoqué au début de ce texte, proposait la fonction : $f(x) = \frac{x^3}{8}$, mais un collègue m'a fait observé que ma modification involontaire rendait le problème plus intéressant!