

# Koordinatensysteme, Trigonometrie und Robotik - interaktiv, virtuell und trotzdem "hands-on"

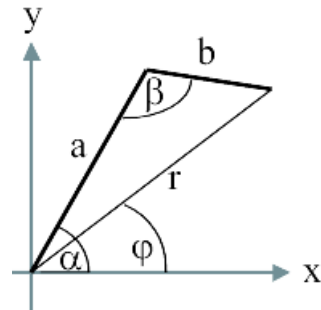
Raimond Reichert und Christoph Steiger, Dept. Informatik ETH Zürich

Bilder sagen mehr als tausend Worte. Bewegte Bilder erst recht! Der Computer erlaubt es, Visualisierungen zum Leben zu erwecken und gibt Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, interaktiv "Experimente" anzustellen. Das World Wide Web macht es möglich, solche interaktiven Programme entweder direkt in Webseiten einzubinden (Java-Applets) oder sie auf einfache Art und Weise zum Download anzubieten. EducETH ([www.educeth.ch](http://www.educeth.ch)) bietet einige interaktive Unterrichtsmaterialien, die meisten für den Informatik-Unterricht, einige aber auch zur Mathematik und Physik. Ein aktuelles Beispiel für den Mathematik-Unterricht demonstriert die Bewegung und Steuerung eines ebenen Roboter-Arms.

Roboter sind auf dem Vormarsch [2]. Zumindest hat das eine "Roboter-Volkszählung" der UNO ergeben, die davon ausgeht, dass die Roboter-Bevölkerung zahlenmässig stark zunehmen wird. Es gibt Roboter in der Auto-Industrie, in der Raumfahrt, es gibt Unterwasserroboter - und nicht zuletzt werden Roboter in der Spielzeugindustrie immer beliebter, wie das Beispiel von Sonys Roboter-Hund Aibo zeigt. Aber selbst wenn der Roboter ein Spielzeug ist, die Steuerung ist komplex. Jedes einzelne Glied des Roboters bedeutet zusätzliche Freiheitsgrade, die kontrolliert werden müssen. Mathematisch gesehen ist ein Roboter ein wandelndes, nichtlineares Gleichungssystem. Um sich zu bewegen, muss ein Roboter ständig ein Gleichungssystem lösen und dabei zwischen verschiedenen Koordinatensysteme hin- und herwechseln. Im Beispiel von Aibo sind es 18 Freiheitsgrade, die von einem 64Bit-RISC-Prozessor mit 64MB Hauptspeicher kontrolliert werden.

Um das Prinzip der Steuerung eines Roboterarms zu demonstrieren, lehnen wir uns an

ein einfaches Modell an, das in [3] ausführlich behandelt wird. Betrachten wir einen Arm, der aus zwei festen Gliedern besteht und somit nur die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  als Freiheitsgrade besitzt. Gesteuert wird der Arm durch Veränderung von  $\alpha$  und  $\beta$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  auf den Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  eingeschränkt sind. Die Position des Roboterarms kann entweder im  $(x, y)$ - oder im  $(\alpha, \beta)$ -Koordinatensystem beschrieben werden. Das  $(x, y)$ -Koordinatensystem beschreibt den Arbeitsbereich, das  $(\alpha, \beta)$ -Koordinatensystem die Stellung der beiden Roboterarme. Die Umrechnung zwischen den beiden Koordinatensystemen ist nicht weiter schwierig und ein schönes Beispiel für eine Anwendung der Trigonometrie.



$$\alpha = \varphi + \arccos \frac{a^2 + r^2 - b^2}{2ar}$$

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2ab}$$

$$x = a \cos \alpha - b \cos (\alpha + \beta)$$

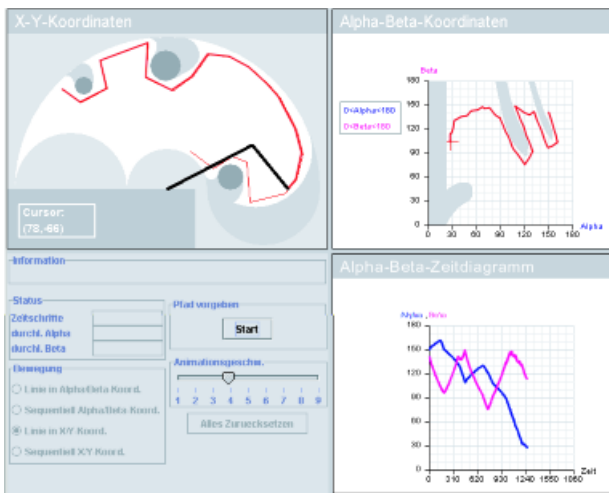
$$y = a \sin \alpha - b \sin (\alpha + \beta)$$

$a$  und  $b$  sind die Längen der beiden Roboterarme.

Die Bewegung des Roboterarms von der Position  $(x_1, y_1)$  zur Position  $(x_2, y_2)$  kann nun sowohl im  $(x, y)$ - als auch im  $(\alpha, \beta)$ -Koordinatensystem mitverfolgt werden. Der

Begriff "optimaler Weg" von einem Punkt zum anderen kann verschieden definiert werden. Geometrisch ist eine Gerade im  $(x, y)$ -Koordinatensystem die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Bei einem echten Roboter will man aber auch den Arbeitsaufwand minimieren. Werden die Winkelstellungen der beiden Glieder des Roboterarms je durch einen Elektromotor verändert, so muss der kürzeste Weg im  $(\alpha, \beta)$ -Koordinatensystem gewählt werden.

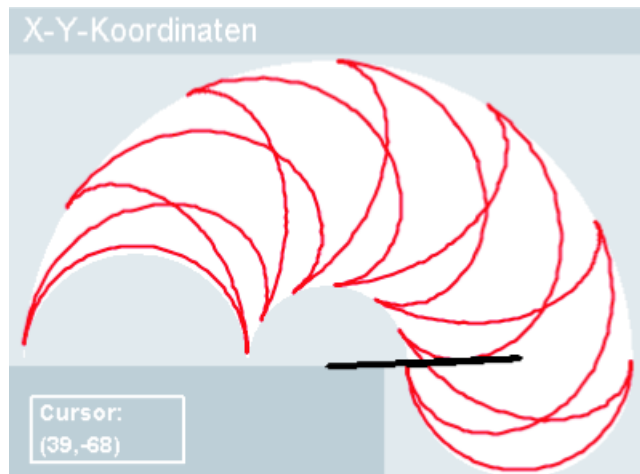
Das Robo-Arm-Applet auf EducETH [3] veranschaulicht die Bewegung des zweigliedrigen Roboterarms und somit auch die Umrechnung zwischen den beiden Koordinatensystemen. Die aktuelle Position der Spitze des Arms wird sowohl in  $(x, y)$ - als auch in  $(\alpha, \beta)$ -Koordinaten dargestellt. Ein Klick in eines der beiden Koordinatensysteme genügt und schon bewegt sich der Arm zu dem gewünschten Punkt. Ein Zeitdiagramm zeigt, wie sich dabei die Winkel ändern. Man kann dem Arm auch kreisförmige Hindernisse in den Weg stellen und verfolgen, welche Bereiche er dann nicht mehr erreichen kann.



Im Mathematik-Unterricht kann man anhand dieser einfachen Roboter-Steuerung eine Viel-

zahl mathematischer Problemstellungen aufzeigen: der Nutzen trigonometrischer Berechnungen, die Rolle von Koordinatensystemen, zeitabhängige Funktionen, die Variation von Parametern (z. B. der Längen der Roboterarme), der Zusammenhang zwischen Weg-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfunktion, geometrische Überlegungen an einfachen Objekten (z. B. Hindernissen) usw. Bei genauer Betrachtung aller auftretenden Probleme könnte man sogar zum Schluss kommen, eine einfache Robotersteuerung gleich als Einstiegspunkt für einen themenübergreifenden Mathematikunterricht an einem Gymnasium zu nehmen. Praxis- und problemorientiert, konkret, einfach zu visualisieren, lassen sich mit dem ebenen Roboterarm wichtige mathematische Konzepte erarbeiten. Ein vielleicht ungewohnter Einstieg, aber durchwegs eine Alternative zu den meist doch sehr stark strukturierten, grosse Zusammenhänge wenig gewichtende traditionellen Lehrmitteln.

Eine Randbemerkung zum Schluss. Man kann mit dem Roboter-Applet auf EducETH schöne Knobel-Aufgaben stellen: wie sieht der im Bild dargestellte Weg des Roboterarms in  $(\alpha, \beta)$ -Koordinaten aus? Applet als Hilfsmittel nicht erlaubt! Gar nicht so einfach, oder?



Quellen:

- [1] Rötzer, F. : Die Roboter kommen. Telepolis, Heise-Verlag, Oktober 2000.  
<http://www.heise.de/tp/deutsch/special/robo/>
- [2] Schneebeli, H. R. : Geometrie von Fall zu Fall, S. 126 ff , sabe-Verlag 1991.
- [3] Steiger, C. , Reichert, R. : Steuerung eines Roboter-Arms, EducETH, Juni 2001.  
<http://www.educeth.ch/informatik/interaktiv/roboarm/>