Gravitationskraft ausserhalb und innerhalb der Erde

Rolf Rose und Radolf von Salis

Dieser Beitrag zeigt Schritt für Schritt, wie die von einer homogenen Kugel auf eine punktförmige Masse ausgeübte Gravitationskraft durch dreifache Integration ausgerechnet werden kann. In Physikbüchern für die Sekundarstufe II wird die Erde kommentarlos durch ihren Schwerpunkt ersetzt. Der Trugschluss liegt nahe, dass man beliebig geformte Körper durch ihren Schwerpunkt ersetzen könnte. Dass dem nicht so ist, wird in diesem Beitrag klar ersichtlich. Ernüchternd ist auch die Tatsache, dass moderne Taschenrechner mit CAS und eingebautem Integrationsoperator die erwartete Hilfe nicht leisten. Traditionelle Integrationsverfahren und Scharfsinn sind nach wie vor gefragt. Ein exemplarisches Beispiel dafür, wie Physik und Mathematik im Schwerpunktfach PAM zusammen arbeiten könnten.

Wir berechnen vorerst die Anziehungskraft, die ein dünner Ring auf eine punktförmige Masse im Abstand z vom Ringmittelpunkt auf der Symmetrieachse ausübt.

Wir greifen ein kleines Massestückchen dm des Ringes heraus und berechnen mit Hilfe des Gravitationsgesetzes den Einfluss, den dieses nahezu punktförmige Massestückchen der Dichte ρ auf die punktförmige Masse M hat. Siehe dazu die Abbildung 1.

$$dm = \rho \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr \cdot dz$$

$dF = G\frac{M \cdot dm}{R^2} = \rho GMr \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \frac{dz}{z^2} \cdot \cos^2\alpha$, mit $R = \frac{z}{\cos\alpha}$

Die Komponente dF_r parallel zur Ringebene wird durch eine Masse dm, die im Kreisring diametral entgegengesetzt ist, aufgehoben.

Die Komponente senkrecht zur Ringebene beträgt:

$$dF_z = dF \cdot \cos\alpha = \rho GMr\cos^3\alpha \cdot dr \cdot \frac{dz}{z^2} \cdot d\varphi$$

Die Gesamtkraft dF_{Ring}, die der Ring auf die Masse M ausübt, erhält man durch Integration von dF_z über den Winkel φ im Bereich von 0 bis 2π. Da alle in der Formel vorkommenden Grössen von φ unabhängig sind, erhalten wir:

$$dF_{Ring} = 2\pi\rho GMr\cos^3\alpha \cdot dr \cdot \frac{dz}{z^2}$$

Mit $r = z \cdot \tan\alpha$ erhalten wir durch Ableiten: $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{z}{\cos^2\alpha}$ und daraus $dr = \frac{z}{\cos^2\alpha}d\alpha$.

Ersetzen wir in der Formel für dF_{Ring} die Grössen r und dr durch diese Ausdrücke, so erhalten wir:

$$dF_{Ring} = 2\pi\rho GM \cdot z \cdot \tan\alpha \cdot \cos^3\alpha \cdot \frac{z}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{dz}{z^2} \cdot d\alpha =$$

$$2\pi\rho GM \cdot dz \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$$

Ausgehend von diesem Resultatat, berechnen wir nun die Kraft, die eine dünne, kreisförmige Platte auf M ausübt. (siehe Abbildung 2).

Die Kraft dF_{Platte}, die die Masse M auf der Symmetrieachse im Abstand z vom Zentrum der homogenen Platte mit der Dicke dz und mir dem Radius x erfährt, ist das Integral

$$dF_{Platte} = 2\pi\rho GM \cdot dz \cdot \int_0^\beta \sin\alpha \; d\alpha = 2\pi\rho GM \cdot dz \cdot (1-\cos\beta) = 2\pi\rho GM \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}\right) dz$$

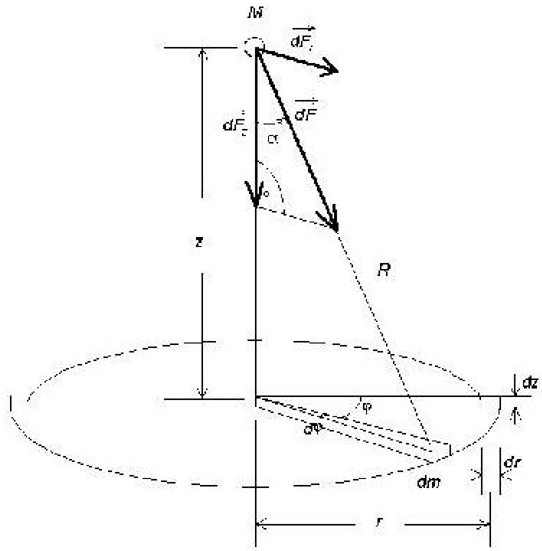

Abb. 1

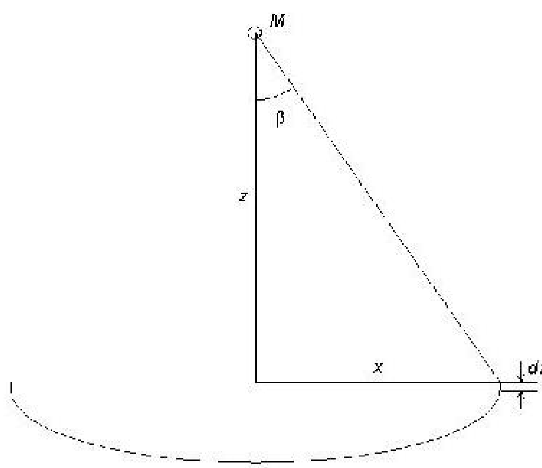

Abb. 2

Man beachte, dass diese Kraft **nicht** gleich ist wie die Kraft, die man erhalten würde, wenn man die Masse der Platte in ihrem Schwerpunkt vereinigt hätte. Dann wäre nämlich die Gravitationskraft zwischen der punktförmigen Masse M und der Platte mit der Masse $dm = \rho\pi x^2 dz$:

$\mathrm{d}F = G\frac{M \cdot dm}{z^2} = 2\pi\rho GM \cdot \frac{x^2 dz}{2z^2}$

Erst im Grenzfall $x << z$ erhält

man für dF_{Platte} diesen Ausdruck, nämlich $2\pi\rho GM\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{z}\right)^2}}\right)dz \approx 2\pi\rho GM(1-(1-\frac{1}{2}(\frac{x}{z})^2))dz = \pi\rho GM\cdot\frac{x^2}{z^2}dz$

Im Spezialfall $x = z$ erhält man $dF_{Platte} = 2\pi\rho GM\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dz = 1.84\rho GMdz$ und $dF = 3.14\rho GMdz$

Interessant ist der Fall $z = 0$. Man erhält $dF_{Platte} = 2\pi\rho GMdz$, also einen endlichen Wert, der beim Uebergang von der einen Seite der Platte auf die andere einen endlichen Sprung macht!

Nun gehen wir dazu über, die Gravitationskraft auszurechnen, die eine homogene Kugel auf eine punktförmige Masse ausübt. Zuerst untersuchen wir den Fall, dass die punktförmige Masse sich ausserhalb der Kugel befindet (siehe Abbildung 3!)

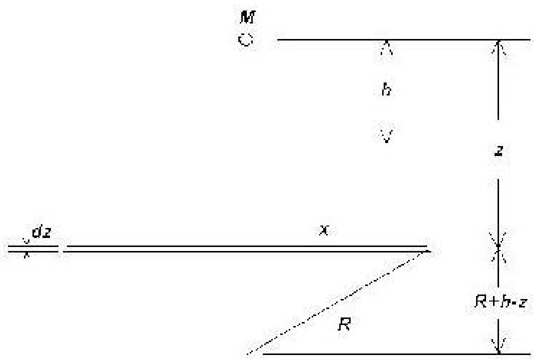

Abb. 3

Die Kraft dF, die die dünne Kugelschicht im Abstand z auf M ausübt ist:

$dF_{Kugel} = 2\pi\rho GM\cdot\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}\right)dz = 2\pi\rho GM\cdot\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2-(R+h-z)^2}}\right)dz$

$$= 2\pi\rho GM\cdot\left(1-\frac{z}{\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}}\right)dz$$

Durch Integration über z erhalten wir die gesuchte Kraft:

$$F_{Kugel} = 2\pi\rho GM\cdot\int_h^{h+2R}\left(1-\frac{z}{\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}}\right)dz = 2\pi\rho GM\left(2R-\int_h^{h+2R}\frac{z\,dz}{\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}}\right)$$

Wenn wir dieses Integral mit dem TI89 berechnen wollen, so erhalten wir ein sehr unübersichtliches Resultat, das kaum interpretiert werden kann. Also gehen wir traditionell vor. Durch partielle Integration erhalten wir mit

$$u = z \qquad \frac{du}{dz} = 1$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}} \qquad v = \frac{\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}}{R+h}$$

$$F_{Kugel} = 2\pi\rho GM\left(2R-\left[\frac{z\cdot\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}}{R+h}\right]_h^{h+2R}+\frac{1}{R+h}\int_h^{h+2R}\sqrt{2(R+h)z-h(h+2R)}\,dz\right)$$

$$F_{Kugel} = 2\pi\rho GM\left(2R-\frac{(h+2R)^2-h^2}{R+h}+\frac{1}{R+h}\left[\frac{\sqrt{((2(R+h)z-h(h+2R))^3}}{3(R+h)}\right]_h^{h+2R}\right)$$

$F_{Kugel} = 2\pi\rho GM\left(2R - \frac{(h+2R)^2-h^2}{R+h} + \frac{(h+2R)^3-h^3}{3(R+h)^2}\right)$

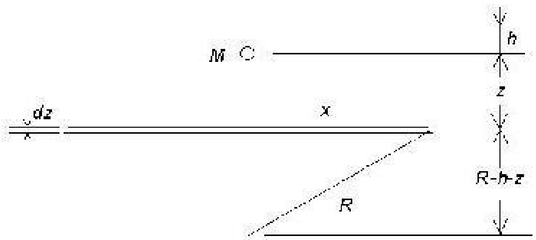

Abb. 4

Die Klammer ergibt nach einigen Rechenschritten: $\frac{2}{3}\frac{R^3}{(R+h)^2}$

Wir erhalten das bemerkenswert einfache Resultat: $F_{Kugel} = \frac{4\pi}{3}R^3\rho GM \cdot \frac{1}{(R+h)^2} = G\frac{mM}{(R+h)^3}$

Eine homogene Kugel verhält sich also tatsächlich so, als ob ihre ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt wäre!

Wenn wir den Massenpunkt ins Kugelinnere versetzen, so erhalten wir die Situation von Abbildung 4. Für die Kraft F auf die Masse M erhalten wir:

$$F = 2\pi\rho GM\cdot\int_{-h}^{2R-h}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2-(R-h-z)^2}}\right)dz = 2\pi\rho GM \cdot \left(2R - \int_{-h}^{2R-h}\frac{z\,dz}{\sqrt{2(R-h)z+h(2R-h)}}\right)$$

Rechnet man das Integral wiederum durch partielle Integration aus, so erhält man das wiederum sehr einfache Resultat

$$F = \frac{4\pi}{3}\rho GM(R-h) = \frac{4\pi}{3}\rho(R-h)^3\cdot\frac{GM}{(R-h)^2} = \frac{GMm^*}{r^2}$$

Dabei ist $r = R - h$ der Abstand der Masse M vom Erdmittelpunkt und m^* die Masse der Kugel mit diesem Radius. Der punktförmige Körper "sieht" also nur das, was sich innerhalb der Kugel vom Radius r befindet. Die Kugelschale von r bis R hat keinen Einfluss. Wenn wir also die Erdkugel im Inneren aushöhlen würden, so wäre dieser Hohlraum frei von Gravitationsfeldern. Eine Tatsache, die jeden Schüler überrascht und an die er nur schwer glaubt.

Interessant ist auch die Feststellung, dass die Gravitationskraft innerhalb der Erde eine abnehmende lineare Funktion von h ist, was ausserhalb der Erde nur in geringer Höhe annähernd der Fall ist, da

$$\frac{GmM}{(R+h)^2} \approx \frac{GmM}{R^2\left(1+\frac{2h}{R}\right)} \approx \frac{GmM}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right) = \frac{GmM}{R^3}(R-2h) \quad \text{für } h \ll R$$