La multiplication matricielle : une opération naturelle !

Maxime Zuber, Gymnase français de Bienne

I. Introduction

Un biologiste de mes connaissances m'a un jour asséné *"qu'il n'y a qu'un mathématicien pour apprécier cette singulière opération qu'est la multiplication matricielle"*. Ce reproche, pour abrupt qu'il soit, peut toutefois sembler fondé pour qui ne cède pas aux charmes d'une composition d'homographies ou ne goûte que fort peu la résolution de deux systèmes imbriqués d'équations linéaires. Aussi convenait-il de convaincre mon ami naturaliste que cette opération, d'apparence rebutante, intervient très naturellement sur son terrain de prédilection. Le but du présent article consiste précisément à montrer qu'un biologiste peut pratiquer la multiplication matricielle sans le savoir, comme on compose des vers sans en avoir l'air.

II. Chaîne alimentaire

Considérons une chaîne alimentaire à trois niveaux constituée par un ensemble $\mathcal{C}$ de prédateurs (c espèces de carnivores), par l'ensemble $\mathcal{H}$ de leurs proies (h espèces d'herbivores) et par la source $\mathcal{P}$ de nourriture des herbivores (p variétés de plantes).

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C} & c \text{ espèces de carnivores} \\ \downarrow A & \\ \mathcal{H} & h \text{ espèces d'herbivores} \\ \downarrow B & \\ \mathcal{P} & p\text{variétés de plantes} \end{array}$$

A et B sont des données définissant les consommations directes d'un maillon écologique à l'autre.

On veut étudier la diffusion d'un polluant (DDT, mercure, etc..) dans cette chaîne alimentaire et déterminer à cette fin la quantité de plantes consommée indiretement par les carnivores.

$$\begin{array}{l} \mathcal{C} \\ \downarrow T \\ \mathcal{P} \end{array}$$

T décrira donc la consommation indirecte entre deux maillons écologiques séparés par un autre maillon.

III. Produits usuel, scalaire et matriciel

Nous constaterons que, selon les valeurs de c, h et p, la règle qui détermine la consommation indirecte s'exprime comme le produit (usuel, extérieur, scalaire, matriciel) des consommations directes.

Cas $c = h = p = 1$: *Produit usuel*

Supposons, par exemple, que

- 1 carnivore dévore $A = 3$ herbivores;

- 1 herbivore ingurgite $B = 2$ plantes.

Cette situation est présentée par les tableaux (matrices) de consommation suivants.

$$\begin{array}{c|c} A & \mathcal{H} \\ \hline \mathcal{C} & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} B & \mathcal{P} \\ \hline \mathcal{H} & (2) \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} T & \mathcal{P} \\ \hline \mathcal{C} & (6) \end{array}.$$

Dans ce cas, un carnivore consomme indirectement $T = A \cdot B = (3) \cdot (2) = (6)$ plantes.
Ainsi, $T = A \cdot B$ n'est autre que le *produit usuel* dans $\mathbb{R}$.

Cas $c = h = 1$, $p = 3$: *Homothétie*

La chaîne alimentaire a alors la forme suivante.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C} & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \mathcal{H} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{P}_1 & & \mathcal{P}_2 & & \mathcal{P}_3 \end{array}$$

Elle donne lieu, par exemple, aux tableaux

$$\begin{array}{c|c} A & \mathcal{H} \\ \hline \mathcal{C} & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} B & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_3 \\ \hline \mathcal{H} & (2 & \boxed{5} & 3) \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} T & \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_3 \\ \hline \mathcal{C} & (6 & \boxed{15} & 9) \end{array}.$$

Ainsi $\boxed{5}$ plantes de l'espèce $\mathcal{P}_2$ sont consommées directement par l'herbivore $\mathcal{H}$ et $\boxed{15}$ le sont indirectement par le carnivore $\mathcal{C}$. Ici le tableau T peut être vu comme le produit du vecteur-ligne $(2\ 5\ 3)$ par le nombre (3).

Cas $c = p = 1$, $h = 3$: *Produit scalaire*

La chaîne alimentaire a la forme suivante.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{C} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{H}_1 & & \mathcal{H}_2 & & \mathcal{H}_3 \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \mathcal{P} & & \end{array}$$

Les tableaux de consommation s'écrivent alors

$$\begin{array}{c|ccc} A & \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 & \mathcal{H}_3 \\ \hline \mathcal{C} & (3 & 1 & 7) \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} B & \mathcal{P} \\ \hline \begin{array}{c} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} T & \mathcal{P} \\ \hline \mathcal{C} & (37) \end{array}.$$

On observe ici que le nombre de plantes de l'espèce $\mathcal{P}$ que consomme le carnivore $\mathcal{C}$ par l'intermédiaire des trois herbivores $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, est donné par le *produit scalaire*

$$T = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = (3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 5) = (37).$$

Cas $c = 3,\ h = 2,\ p = 4$: *Produit matriciel*[1]

Dans ce cas, la chaîne alimentaire

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 & & \mathcal{C}_3 & \\
 & & & \Downarrow & & & \\
 & & \mathcal{H}_1 & & \mathcal{H}_2 & & \\
 & & & \Downarrow & & & \\
\mathcal{P}_1 & & \mathcal{P}_2 & & \mathcal{P}_3 & & \mathcal{P}_4
\end{array}$$

est décrite par les tableaux de consommation suivants

$$\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{cc} \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \boxed{3} & \boxed{5} \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} B & \begin{array}{cccc} \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_3 & \mathcal{P}_4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{4} & 5 \\ 4 & 4 & \boxed{7} & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} T & \begin{array}{cccc} \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 & \mathcal{P}_3 & \mathcal{P}_4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{C}_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 16 & 16 & 28 & 4 \\ 23 & 20 & \boxed{47} & 20 \\ 29 & 28 & 53 & 12 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Le nombre de plantes de l'espèce $\mathcal{P}_3$ que consomme le carnivore $\mathcal{C}_2$, par sa consommation indirecte des herbivores $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, se trouve à la ligne 2 et à la colonne 3 du tableau T. On a alors

$$\boxed{47} = \boxed{3} \cdot \boxed{4} + \boxed{5} \cdot \boxed{7}.$$

La matrice T n'est rien d'autre que le produit des matrices A et B.

IV. Conclusions

En fait, ces différents exemples démontrent que la consommation indirecte entre deux maillons écologiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ est toujours donnée par le produit $T = A \cdot B$ des matrices A et B décrivant les consommations directes entre maillons voisins. Si c, h et p désignent respectivement les nombres d'espèces des niveaux $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$, alors A est une $c \times h$ - matrice, B est une $h \times p$ - matrice et donc T est une $c \times p$ - matrice. Voilà mon ami naturaliste convaincu !

[1] Ce dernier cas est présenté dans : E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, Third Edition, Springer, 1979.