Wieviele spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gibt es im regulären n-eck

Peter Hohler
Kantonsschule Olten

Im Bulletin Nr. 87 vom September 2001 findet sich unter den zum DMK-Wettbewerb ausgeschriebenen Aufgaben die folgende interessante kombinatorische Frage:

> Zeichnet man in ein regelmässiges *n-Eck* alle Diagonalen ein, so ergeben sich $\binom{n}{3}$ Dreiecke $A_iA_jA_k$, wobei A_i, A_j, A_k Ecken des regelmässigen *n-Ecks* sind.
>
> Wie viele von diesen Dreiecken sind stumpfwinklig bzw. rechtwinklig bzw. spitzwinklig?

Damit ein Dreieck *rechtwinklig* ist, müssen zwei der drei Ecken diametral entgegenge-setzt sein. Für ungerades n gibt es kein solches Eckenpaar, für gerades n gibt es $\frac{n}{2}$ solche Paare und zu jedem Paar A_iA_j gibt es $n-2$ Ecken A_k.

Ein n-eck enthält also für gerade Eckenzahl $\frac{n(n-2)}{2}$ rechtwinklige Dreiecke und für ungerade Eckenzahl keine.

Die *stumpfwinkligen* Dreiecke zählen wir folgendermassen : Wir wählen einen der n Punkte A_i, von dem der stumpfe Winkel ausgehen soll. Damit nun der Winkel in A_i stumpf ist, muss die gegenüberliegende Seite, von A_i aus gesehen, vor dem Mittelpunkt des n-ecks durchlaufen.

Liegen A_j in positiver und A_k in negativer Richtung von A_i, so gibt es, wenn A_j direkt neben A_i liegt, bei gerader Eckenzahl $\frac{n}{2}-2=\frac{n-4}{2}$ und bei ungerader Eckenzahl $\frac{n-1}{2}-1=\frac{n-3}{2}$ mögliche Gegenseiten. Liegt ein Punkt zwischen A_i und A_j, so nimmt die Anzahl der möglichen Gegenseiten A_jA_k um eins ab, liegen zwei Punkte dazwischen, nimmt die Anzahl um zwei ab usw.

Für gerades n gibt es demnach

$$n(\frac{n-4}{2}+\frac{n-6}{2}+\ldots)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{n-2}{2}=\frac{n(n-2)(n-4)}{8}$$

und für ungerades n

$$n(\frac{n-3}{2}+\frac{n-5}{2}+\ldots)=n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$$

stumpfwinklige Dreiecke.

Die Anzahl der *spitzwinkligen* Dreiecke berechnet sich dann für gerades n zu

$$\binom{n}{3}-\frac{n(n-2)}{2}-\frac{n(n-2)(n-4)}{8}=\frac{n(n-2)(n-4)}{24}$$

und für ungerades n zu

$$\binom{n}{3}-\frac{n(n-1)(n-3)}{8}=\frac{(n+1)n(n-1)}{24}$$

Stellen wir diese Anzahlen für $3\leq n\leq 12$ in einer Liste zusammen:

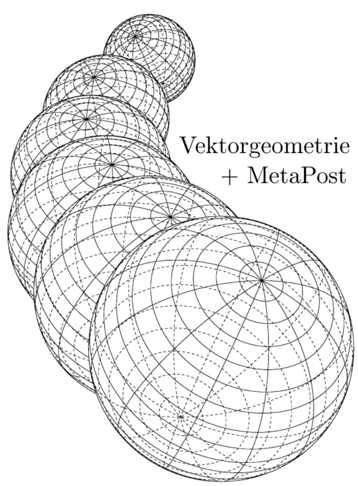
n	spitzw. Dreiecke	rechtw. Dreiecke	stumpfw. Dreiecke	total
3	1	0	0	1
4	0	4	0	4
5	5	0	5	10
6	2	12	6	20
7	14	0	21	35
8	8	24	24	56
9	30	0	54	84
10	20	40	60	120
11	55	0	110	165
12	40	60	120	220

Wie bemerken, dass es für gerades n dreimal soviele stumpfwinklige wie spitzwinklige Dreiecke gibt, was natürlich unmittelbar aus den Formeln folgt. Bei ungerader Eckenzahl ist der Anteil der spitzwinkligen Dreiecke – jedenfalls für kleine n – grösser als bei gerader Eckenzahl. Das Verhältnis der stumpfwinkligen zu den spitzwinkligen Dreiecken geht aber auch hier gegen 3, wie man ebenfalls rasch erkennt:

$$\frac{\frac{1}{8}n(n-1)(n-3)}{\frac{1}{24}(n+1)n(n-1)} = 3 \cdot \frac{n-3}{n+1} \to 3 \text{ für } n \to \infty$$

Fassen wir nun den Kreis als Grenzfall des regulären n-ecks auf, so folgt, dass bei einer zufälligen Wahl dreier Punkte P, Q, R auf der Peripherie eines Kreises diese mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% ein stumpfwinkliges und mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 25% ein spitzwinkliges Dreieck bilden.

Betrachten wir im weiteren die Länge der Kreisbogen PQ, QR und RP, so lässt sich im Fall des spitzwinkligen Dreiecks mit diesen drei Bögen, zu Strecken gezogen, ein Dreieck bilden, während das im Fall des stumpfwinkligen Dreiecks nicht möglich ist. Diese Überlegung löst das bekannte Problem: “Man wählt auf einem Stab zufällig zwei Punkte und zersägt diesen dort. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit den entstehenden drei Stäben ein Dreieck gebildet werden kann?” Man kann sich den Stab elastisch zu einem Kreis gebogen denken und wählt dann auf dem Kreisumfang neben dem Punkt P, in dem sich Anfang und Ende des Stabes treffen, zwei weitere Punkte Q und R. Bilden P, Q, R ein spitzwinkliges Dreieck, so kann man mit den drei Teilstäben – wieder gerade gebogen – ein Dreieck bilden und sonst nicht. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Dreieck gebildet werden kann, beträgt somit 1/4.



Urs Oswald, Mai 2002