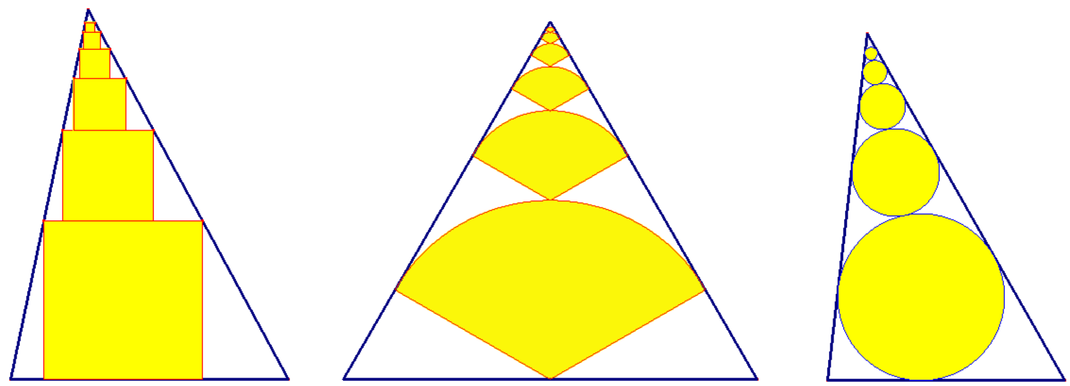
Empilements dans un triangle

La formule de sommation des séries géométriques permet de calculer l'aire de certaines surfaces formées de motifs homothétiques. C'est notamment le cas des surfaces grisées illustrées ci-dessous.



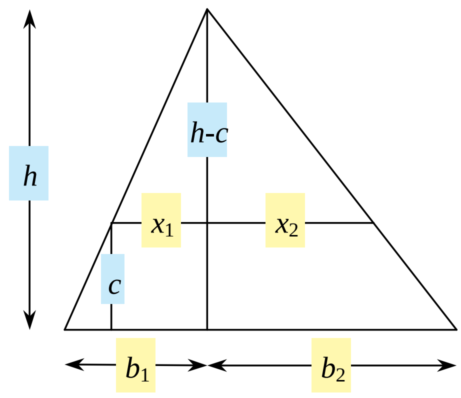
Traditionnellement, on choisit un triangle isocèle de forme donnée, on calcule l'aire du motif de base, on détermine le rapport d'homothétie permettant de passer d'un motif au suivant, puis on en déduit l'aire de la surface finalement grisée. Il est alors facile de savoir quelle est la part du triangle qui couverte par ces motifs.

Pour élargir ce champ d'activité, j'ai essayé de calculer l'aire d'un empilement de carrés ou de disques dans un triangle arbitraire. J'ai constaté que le taux de couverture n'est pas toujours évident à calculer.

Empilement de carrés

On veut inscrire un carré dans un triangle. Le carré est posé sur la base du triangle, tous ses sommets sont sur les côtés du triangle. Un premier carré étant dessiné, on réitère l'inscription d'un nouveau carré posé au dessus du précédent. Dans un premier temps, il faut calculer le côté du premier carré, puis il s'agira de déterminer l'aire totale de tous les carrés.

Premier carré inscrit



Dans un triangle de base ***b*** et de hauteur ***h***, on donne un côté ***c*** et l'on calcule $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$.

$$\frac{h-c}{x_1} = \frac{h}{b_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{h-c}{h} b_1$$

$$\frac{h-c}{x_2} = \frac{h}{b_2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{h-c}{h} b_2$$

Pour obtenir un carré de côté c, on impose que $c = x_1 + x_2$

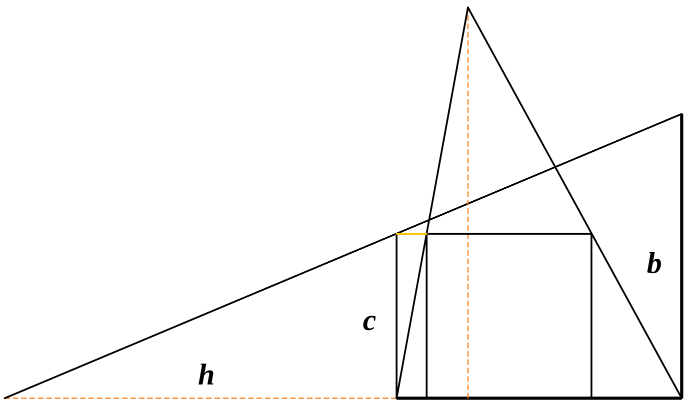
$$c = x_1 + x_2 = \frac{h-c}{h}(b_1 + b_2) = \frac{h-c}{h} b$$

La condition obtenue permet de calculer c en fonction de la hauteur h et de la base b.

$$c = \frac{h-c}{h} b \quad \Rightarrow \quad c = \frac{hb}{h+b} = \frac{h}{h+b} b$$

Construction

Comme le montre la dernière expression, on obtient le côté c en réduisant la base b dans le rapport $k = \frac{h}{h+b}$. Cela explique une construction de c à l'aide d'une homothétie.



On a noté ***b*** la base du triangle, ***h*** sa hauteur et ***c*** le côté du carré inscrit.

La construction de c résulte d'une réduction de b par une homothétie de rapport $k = \frac{h}{h+b}$

Itération

Le premier carré inscrit est posé sur la base b, le deuxième sera inscrit dans le triangle supérieur de base c. Comme on passe du grand triangle au petit par une réduction de rapport k, on doit multiplier l'aire du premier carré par k^2 pour obtenir l'aire du carré suivant. Cette observation permet de calculer l'aire cumulée de tous les carrés successifs :

$$\text{Aire totale} = c^2(1+k^2+k^4+k^6+\cdots) = c^2\frac{1}{1-k^2} = \frac{h^2b^2}{(h+b)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{h^2}{(h+b)^2}} = \frac{h^2b^2}{(h+b)^2-h^2}$$

Pour connaître la part du triangle qui est couverte par les carrés, on calcule le rapport des aires. Comme l'aire du triangle vaut ½ $b\,h$, on obtient la proportion

$$p = \frac{h^2b^2}{(h+b)^2-h^2}\cdot\frac{2}{b\,h} = \frac{2bh}{(h+b)^2-h^2} = \frac{2bh}{2bh+b^2} = \frac{2h}{2h+b}$$

En choisissant la base du triangle comme unité de mesure, cette proportion devient une fonction simple de la hauteur.

Couverture du triangle

La fonction $h \mapsto p = \frac{2h}{2h+1}$ donne la part du triangle couverte selon sa hauteur.

Cette fonction une bijection entre les hauteurs positives h et les proportions p comprises entre 0 et 1. A titre d'exemple, on peut calculer quelques couvertures ou hauteurs

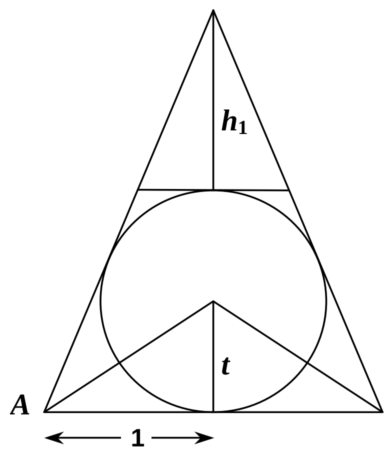
hauteur	1/6	1/2	3/2	99,5
couverture	25 %	50 %	75 %	99,5 %

Empilement de disques

On remplace l'empilement des carrés par un empilement de disques. Comme le montre la figure initiale, le premier disque est délimité par le cercle inscrit dans le triangle. Le second disque, puis tous les suivants, s'appuie sur deux côtés du triangle et sur le disque précédent. Ainsi, à moins que le triangle ne soit isocèle, les rayons successifs ne forment une suite géométrique qu'à partir du deuxième. Pour rester compréhensible, on commence par traiter le cas des triangles isocèles.

Cas du triangle isocèle

La demi-base étant l'unité, le triangle est entièrement déterminé par l'angle α en *A*.



Comme on le voit sur la figure ci-contre, le rayon du cercle inscrit est alors simplement le nombre $t = \tan(\frac{1}{2}\alpha)$

La hauteur h et l'aire du triangle sont données par la même expression : $h = \tan(a) = \dfrac{2t}{1-t^2}$

La hauteur h_1 du triangle supérieur vaut

$$h_1 = h - 2t = \frac{2t}{1-t^2} - 2t = 2t\frac{t^2}{1-t^2} = \frac{2t^3}{1-t^2}$$

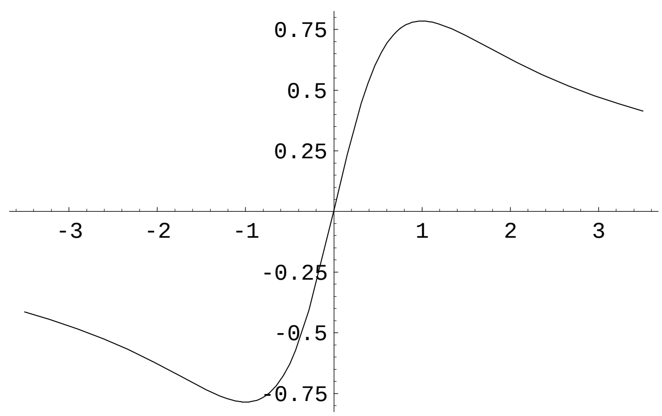
Le rapport de réduction du grand au petit triangle est $k = \dfrac{h_1}{h} = \dfrac{2t^3}{1-t^2} \cdot \dfrac{1-t^2}{2t} = t^2$

L'aire de l'empilement de disques vaut ainsi $\pi t^2(1+k^2+k^4+\cdots) = \pi t^2 \dfrac{1}{1-k^2} = \dfrac{\pi t^2}{1-t^4}$

La part de couverture du triangle est donc $p = \dfrac{\pi t^2}{1-t^4} \cdot \dfrac{1-t^2}{2t} = \dfrac{\pi t}{2(1+t^2)} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{t}{1+t^2}$.

Le graphe de la fonction $t \mapsto p = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{t}{1+t^2}$ est une serpentine qui croît de -1 à 1.

La fonction établit donc une bijection entre les intervalles $]0;1[$ et $]0;\frac{\pi}{4}[$.



Ainsi, chaque valeur possible de $t = \tan(\frac{1}{2}\alpha)$ est en correspondance biunivoque avec une part de couverture p inférieure à 78,54%.
La part p étant donnée, la valeur correspondante de t s'obtient en résolvant une équation du deuxième degré.

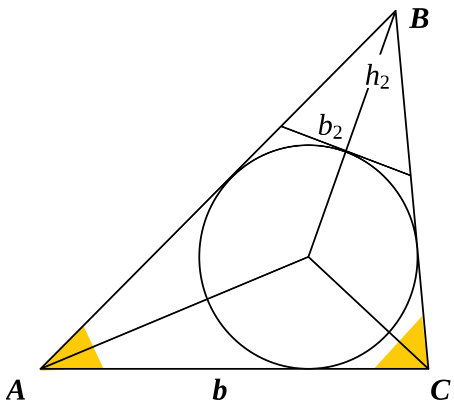
De manière générale, on obtient la relation $t = \dfrac{\pi - \sqrt{\pi^2 - 16p^2}}{4p}$

Exemples

angle	18.56°	30°	60°	72.73°
couverture	25 %	39.27 %	68.02 %	75 %

Approche du triangle quelconque

Pour fixer la forme du triangle, on donne sa base ***b*** et les deux angles α et γ adjacents à cette base.



Le rayon r du cercle inscrit est la hauteur du triangle inférieur de base b et d'angles $\alpha' = ½\,\alpha$ et $\gamma' = ½\,\gamma$; il est donné par

$$r = b\frac{\sin(\alpha')\sin(\gamma')}{\sin(\alpha'+\gamma')}$$

La distance du sommet B au centre du cercle inscrit est donnée par

$$a' = b\frac{2\sin(\alpha')\sin(\gamma')}{\sin(\alpha+\gamma)}$$

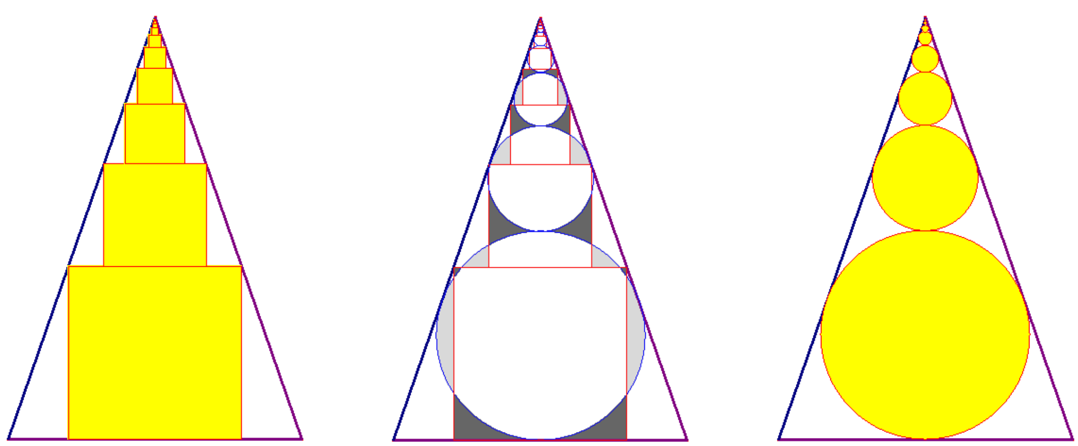
Les disques suivants sont à inscrire dans le triangle isocèle supérieur. Dans un tel triangle l'aire de l'empilement de disques est relativement facile à calculer à partir de la hauteur h_2 et la demi-base b_2 du triangle.

Ces dimensions valent ici $h_2 = a' - r$ et $b_2 = \dfrac{h_2}{\tan(\alpha'+\gamma')}$

On le voit, les expressions s'alourdissent et l'aire cumulée des disques ne semble pas être une fonction simple des angles α et γ. Quelle est la voie royale pour terminer simplement les calculs ?

Comparaison

Grâce à la découverte d'une méthode de construction d'un carré inscrit dans un triangle, il est facile de créer une commande du logiciel Cabri pour générer de multiples figures. D'un autre côté la construction traditionnelle du cercle inscrit dans un triangle complétée par l'ajout de deux points permet aussi d'expérimenter le remplissage par des empilement de disques.
L'observation conduit à se poser une question. Est-il possible dans un triangle, que le taux de remplissage soit le même avec un empilement de carrés ou avec un empilement de disques ?
La figure ci-dessous montre l'une des deux solutions valables pour les triangles isocèles. Les curieux pourront calculer l'autre !



P.S. Erreurs ou compléments à transmettre à l'adresse "Marcel-Yves.Bachmann@rpn.ch"