

# Merkwürdiges im Dreieck

Heinz Klemenz

## 1 Einleitung

Das Dreieck hat schon die Geometer der Antike in ihren Bann gezogen und im Laufe der Geschichte der Mathematik hat es nichts von seiner Faszination eingebüsst. Im 19. Jahrhundert wurden Untersuchungen am Dreieck im Rahmen der sogenannten Elementargeometrie zunehmend zu einem eigentlichen Forschungsgebiet von Gymnasiallehrern ([1]). Als besonders reizvoll und ergiebig erwiesen sich dabei spezielle Punkte und Linien als Invarianten des Dreiecks, die wir dem üblichen Sprachgebrauch folgend, im weiteren als *merkwürdige* Punkte und Linien bezeichnen. Als bekannte Beispiele seien hier etwa der Höhenschnittpunkt und die EULERSche Gerade genannt, welche auch im gymnasialen Unterricht behandelt werden. Leider sind die vielen faszinierenden und oft auch überraschenden Resultate und Methoden gerade bei angehenden Mathematik-Lehrkräften und Studierenden wieder eher in Vergessenheit geraten. Mit dem Einsatz von dynamischen Geometriensystemen (Cabri-géomètre, Euklid, Cinderella, etc.) sind demgegenüber auch Schülerinnen und Schüler in der Lage, selbständig merkwürdige Entdeckungen in Dreiecken zu machen. Dank des in den erwähnten Systemen implementierten Zugmodus lassen sich leicht Vermutungen aufstellen und auch erhärten. In den letzten zehn Jahren hat denn auch eine eigentliche Jagd auf merkwürdige Punkte im Dreieck stattgefunden, was sich auch in einigen Publikationen der jüngsten Zeit (z. B. in [2]) niedergeschlagen hat. Mittlerweile wurden gegen 400 solche Punkte gefunden und von Kimberling ([3]) sehr ausführlich und systematisch beschrieben.

In diesem Artikel befassen wir uns zuerst mit einigen klassischen Resultaten, welche im Schulunterricht kaum zur Sprache kommen, obwohl sie sehr einfach zu formulieren und mit herkömmlichen elementargeometrischen Mitteln zu beweisen sind. Im Zentrum vieler klassischer Beweise steht dabei der berühmte Satz von CEVA. Hernach wenden wir uns einer an Gymnasien weitgehend unbekanntem analytischen Methode zu, mit welcher wir auch rechnerische Beweise führen können. Mit der damit verbundenen Einführung von neuartigen Koordinaten soll auch interessierten Schülerinnen und Schülern ein kurzer Einblick in ein Gebiet gegeben werden, das durchaus im Rahmen einer Maturarbeit in „reiner“ Mathematik angegangen werden könnte. Abschliessend lernen wir einen der wundersamsten Sätze der Elementargeometrie kennen, der von FEUERBACH stammt, und treffen dort einen weiteren besonders merkwürdigen Punkt an.

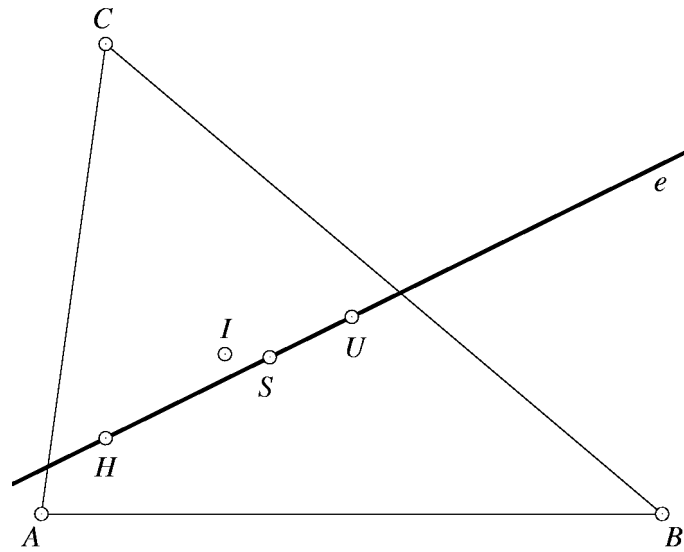
## 2 Einige klassische merkwürdige Punkte

Neben dem Höhenschnittpunkt  $H$  liegen bekanntlich auch noch der Schwerpunkt  $S$  und der Umkreismittelpunkt  $U$  auf der EULERSchen Geraden  $e$  (Abb. 1), wie man mit Hilfe von elementarer Vektorgeometrie leicht zeigen kann. (siehe z. B. [4])

Der Inkreismittelpunkt  $I$  scheint zunächst isoliert zu liegen, aber es wird sich in Abb. 3 zeigen, dass er ebenfalls auf einer speziellen Geraden liegt. Auch die meisten anderen besonderen Punkte im Dreieck ergeben sich als Schnittpunkte von Ecktransversalen, also von Geraden, welche durch die Eckpunkte des Dreiecks verlaufen und die gegenüberliegenden Seiten schneiden. Beispielsweise verbinden wir die Berührungspunkte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  des Inkreises mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks und erhalten als gemeinsamen Transversalenschnittpunkt den sogenannten GERGONNE-Punkt  $G$ . (Abb. 2)

Um zu beweisen, dass ganz allgemein ein Punkt  $T$  Schnittpunkt von drei Ecktransversalen  $AX$ ,  $BY$  und  $CZ$  ist, muss mit der Umkehrung des Satzes von CEVA gezeigt werden, dass  $\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$  gilt. Dies ist für den GERGONNE-Punkt offensichtlich der Fall, weil je zwei der vorkommenden Streckenlängen gleich gross sind. Auf analoge Art lassen sich leicht Beweise für den Inkreismittelpunkt  $I$  oder den NAGEL-Punkt  $N$  (Schnittpunkt der Ecktransversalen zu den Ankreisberührungspunkten) finden.

Aus der Abb. 3 entsteht die Vermutung, dass  $N$  auf der Geraden  $IS$ , der sogenannten NAGEL-Geraden, liegt, was sich elementargeometrisch zeigen lässt. Wir werden aber im Abschnitt 4 einen analytischen Beweis

Abbildung 1: Die EULER-Gerade  $e$ 

unter Verwendung von homogenen Koordinaten angeben. Im übrigen sei auf die nichttriviale Tatsache hingewiesen, dass der Schwerpunkt  $S$  sowohl die Strecken  $UH$  als auch  $IN$  im Verhältnis  $1 : 2$  teilt, mithin das Viereck  $HNUI$  ein Trapez bildet.

Wir wollen an dieser Stelle nicht weiter auf die klassischen Resultate eingehen und verweisen nur noch auf die „Landkarte“ am Ende dieses Artikels, wo man z. B. beobachten kann, dass der Mittelpunkt  $M$  des FEUER-BACHSchen Neunpunktekreises auf der EULERSchen Geraden liegt und die dort schon vorhandenen Punkte  $U$ ,  $S$  und  $H$  harmonisch ergänzt.

### 3 Homogene Koordinaten für die merkwürdigen Punkte

Bevor wir sogenannte homogene Koordinaten einführen, wollen wir mit Nachdruck festhalten, dass es im Folgenden nicht darum geht, die Eleganz der elementargeometrischen Beweise in Zweifel zu ziehen, sondern eine Alternative zum Arbeiten mit Vektoren in einem kartesischen Koordinatensystem aufzuzeigen, welches für solche Zwecke oft mühsam und unangemessen ist.

Stattdessen drücken wir Punkte und Geraden mit alternativen Koordinaten und Gleichungen aus. Einerseits können wir einen Punkt  $T$  im Dreieck durch Angabe der Proportionen seiner orientierten Abstände von den Dreiecksseiten festlegen. Der Punkt  $T$  ist dann eindeutig bestimmt durch die Angabe der Verhältniskette  $u' : v' : w'$ , wobei in Abb. 4 der Wert von  $v'$  negativ wird. Durch Multiplikation mit einer reellen Zahl bleibt die Lage des Punktes gleich; deshalb spricht man auch von *homogenen* Koordinaten.

Eine andere, ebenfalls auf das Dreieck  $ABC$  bezogene Variante besteht darin, die orientierten Flächeninhalte der Dreiecke  $BCT$ ,  $CAT$  und  $ABT$  als Verhältniskette  $u : v : w$  anzugeben. In der Fachliteratur werden solche Koordinaten als *baryzentrische* Koordinaten oder einfach als *Flächenkoordinaten* bezeichnet (siehe z. B. [5], [6]). Sie wurden 1827 von A. F. Moebius eingeführt und sind selbstverständlich ebenfalls homogen, insbesondere stellen sich dann die Eckpunkte besonders einfach mit  $A(1 : 0 : 0)$ ,  $B(0 : 1 : 0)$  und  $C(0 : 0 : 1)$  dar.

Die folgende Tabelle enthält ohne Herleitung einige Dreieckspunkte mit trilinearen und baryzentrischen Koordinaten (siehe [7]). Aus den trilinearen Koordinaten  $(u' : v' : w')$  erhalten wir sofort baryzentrische Koordinaten  $(au' : bv' : cw')$ , wobei man die baryzentrischen Koordinaten manchmal leichter findet.

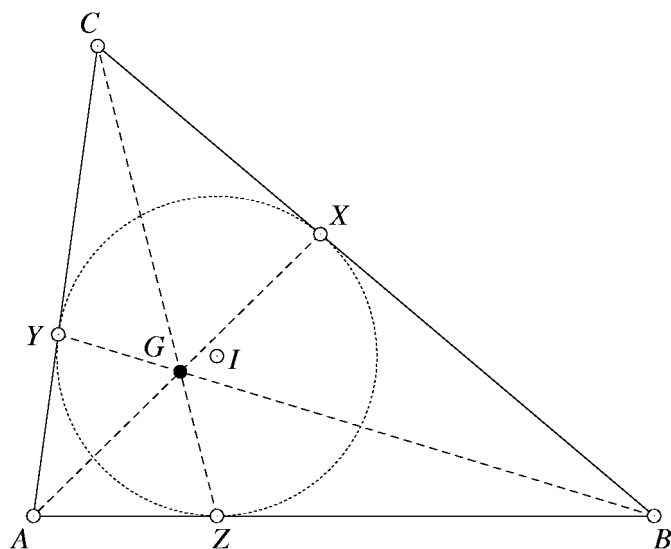


Abbildung 2: GERGONNE-Punkt  $G$

## 4 Lageuntersuchungen mit homogenen Koordinaten

In diesem Abschnitt diskutieren wir die baryzentrischen Lösungen der wichtigsten Lageprobleme:

- Wie untersucht man die Inzidenz eines Punktes bezüglich einer Geraden?  
(Dies ist das baryzentrische Analogon zum Satz von MENELAOS.)
- Wie entscheidet man, ob sich drei Geraden in einem Punkt schneiden?  
(Dies ist das baryzentrische Analogon zum Satz von CEVA.)
- Wie stellt man fest, dass zwei Geraden parallel verlaufen?
- Wie teilt man eine Strecke in einem vorgegebenen Verhältnis?

Die Beweise der nachfolgenden Resultate beruhen auf einem erstaunlich einfachen Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  und *normierten* baryzentrischen Koordinaten  $(u : v : w)$  (vgl. [6], S. 69ff.). Die Normierung der baryzentrischen Koordinaten geschieht dabei durch  $u + v + w = 1$ , d. h. der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt eine Einheit.

Die Transformation erfolgt mit  $\mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ , wobei die Matrix  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  durch die Koordinaten der Eckpunkte  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  und  $C(x_3, y_3)$  bestimmt ist.

Anschaulich erhalten wir so einen Punkt  $(x, y)$  mit dem durch  $u$ ,  $v$  und  $w$  gewichteten Mittel aus den Eckkoordinaten.

Beispiel: Als kleine Anwendung berechnen wir auf diese Weise die kartesischen Koordinaten des Inkreismitelpunktes  $I$  beim Dreieck  $A(-9, 2)B(12, 2)C(-3, 10)$  mit den Seitenlängen  $a = 17$ ,  $b = 10$  und  $c = 21$ .  $I$  besitzt dann die normierten baryzentrischen Koordinaten  $(\frac{17}{48} : \frac{10}{48} : \frac{21}{48})$  (vgl. Abb. 6) und dank der einfachen Umrechnung die kartesischen Koordinaten  $x = -2$  und  $y = \frac{11}{2}$ .

Die einleitend gestellten Probleme lassen sich nun gemäss [6] folgendermassen lösen:

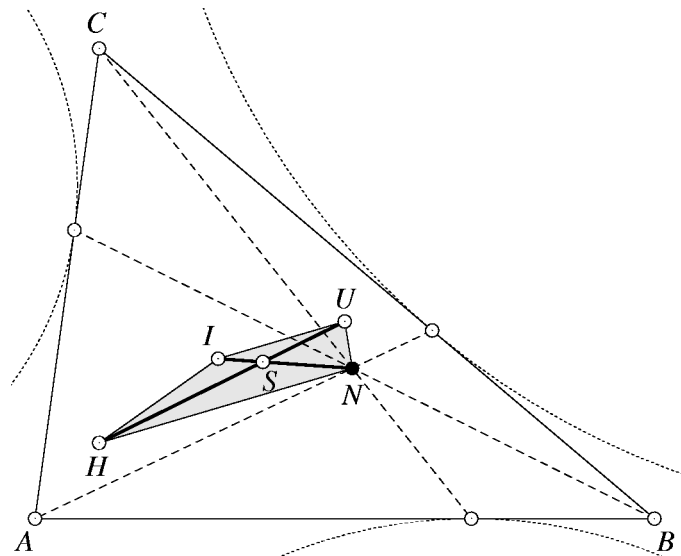


Abbildung 3: NAGEL-Punkt  $N$  im Viereck  $HNUI$

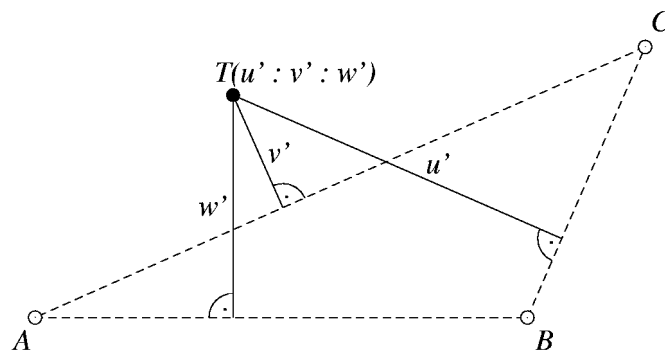


Abbildung 4: *Trilineare* Koordinaten des Punktes  $T$  im Dreieck  $ABC$

a) Drei Punkte  $(u_1 : v_1 : w_1)$ ,  $(u_2 : v_2 : w_2)$  und  $(u_3 : v_3 : w_3)$  liegen genau dann auf *einer* Geraden,

wenn 
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$
 ist.

Beispiel: Der NAGEL-Punkt  $N$  liegt auf der Geraden  $SI$ , da 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ s-a & s-b & s-c \end{vmatrix}$$
 verschwindet.

Eine baryzentrische Geradengleichung erhält demnach die (homogene) Form  $au + bv + cw = 0$ , wenn wir einen der Punkte durch  $(u : v : w)$  ersetzen und die Determinante ausrechnen.

Beispiel: Die Gleichung der Schwerlinie  $s_c$  lautet 
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = v - u = 0$$
 bzw.  $v = u$ , was natürlich auch ohne Formalismus einleuchtend ist.

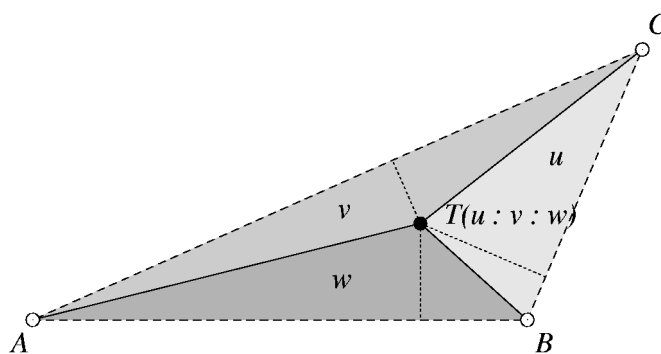


Abbildung 5: Baryzentrische Koordinaten des Punktes  $T$  im Dreieck  $ABC$

Punkt	Trilineare Koordinaten	Baryzentrische Koordinaten
Mittelpunkt $M_{AB}$	$1/a : 1/b : 0$	$1 : 1 : 0$
Inkreismittelpunkt $I$	$1 : 1 : 1$	$a : b : c$
Schwerpunkt $S$	$1/a : 1/b : 1/c$	$1 : 1 : 1$
Umkreismittelpunkt $U$	$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$	$a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma$
Höhenschnittpunkt $H$	$\cos \beta \cos \gamma : \cos \alpha \cos \gamma : \cos \alpha \cos \beta$	$a \cos \beta \cos \gamma : b \cos \alpha \cos \gamma : c \cos \alpha \cos \beta$
NAGEL-Punkt $N$	$(s - a)/a : (s - b)/b : (s - c)/c$	$(s - a) : (s - b) : (s - c)$

Abbildung 6: Beispiele von Punkten in homogenen Koordinaten nach [7] mit  $s$  als halbem Umfang

- b) Drei Geraden mit den Gleichungen  $a_1u + b_1v + c_1w = 0$ ,  $a_2u + b_2v + c_2w = 0$  und  $a_3u + b_3v + c_3w = 0$  sind genau dann parallel oder schneiden sich in einem einzigen Punkt,

$$\text{wenn } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten  $(b_1c_2 - b_2c_1) : (c_1a_2 - c_2a_1) : (a_1b_2 - a_2b_1)$ . Punkte, welche die Bedingung  $u + v + w = 0$  erfüllen, sind sogenannte unendlich ferne Punkte; so liegt der Punkt mit den Koordinaten  $1 : -1 : 0$  auf der Geraden  $AB$  im Unendlichen.

Beispiel: Im Falle der drei Schwerlinien verschwindet tatsächlich die Determinante  $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  und für den Schwerpunkt als Schnittpunkt erhält man die Koordinaten  $1 : 1 : 1$ .

- c) Zwei Geraden mit den Gleichungen  $a_1u + b_1v + c_1w = 0$  und  $a_2u + b_2v + c_2w = 0$  sind genau dann parallel,

$$\text{wenn } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Die beiden Geraden schneiden sich also sozusagen mit der unendlich fernen Geraden  $u + v + w = 0$  in einem unendlich fernen Punkt.

- d) Die Strecke  $P_1(u_1 : v_1 : w_1)P_2(u_2 : v_2 : w_2)$  werde im Verhältnis  $t_2 : t_1$  geteilt, wobei die Koordinaten normiert sind. Dann hat der Teilpunkt die Koordinaten  $((t_1u_1 + t_2u_2) : (t_1v_1 + t_2v_2) : (t_1w_1 + t_2w_2))$ .

Beispiel: Teilen wir die NAGEL-Strecke  $IN$  im Verhältnis  $1 : 2$  so erhalten wir den Schwerpunkt  $S$ , wenn wir mit den normierten Koordinaten von  $I(\frac{a}{2s} : \frac{b}{2s} : \frac{c}{2s})$  und  $N(\frac{s-a}{s} : \frac{s-b}{s} : \frac{s-c}{s})$  arbeiten.

Wir lassen es bei diesen einfachen Beispielen bewenden und weisen abschliessend darauf hin, dass die Rechnungen nicht immer so elegant verlaufen wie hier. In der Praxis (z. B. in ([7]) werden deshalb oft auch Computer-Algebra-Systeme herangezogen, um die zuweilen recht aufwendigen Terme zu vereinfachen.

## 5 Eine kleine Ergänzung zum Satz von Feuerbach

Der 1822 von FEUERBACH entdeckte Satz, wonach sowohl der Inkreis eines Dreiecks als auch dessen drei Ankreise den Neunpunktekreis berühren, wurde schon oft als der schönste Satz der Elementargeometrie bezeichnet (Abb. 7). Erstaunlich ist, dass sich dieser Satz sogar mit elementarer Schulgeometrie beweisen lässt (siehe [8]). Beim Konstruieren der untenstehenden Figur gerät man in Versuchung, die Ecktransversalen der Berührungspunkte  $X$ ,  $Y$  und  $Z$  einzuzichnen und die gegenseitige Lage der drei Geraden zu untersuchen. Im Zugmodus eines dynamischen Geometriesystems zeigt sich, dass sich die Ecktransversalen tatsächlich in einem Punkt  $P$  schneiden und zudem  $P$  auf  $MI$  zu liegen kommt.

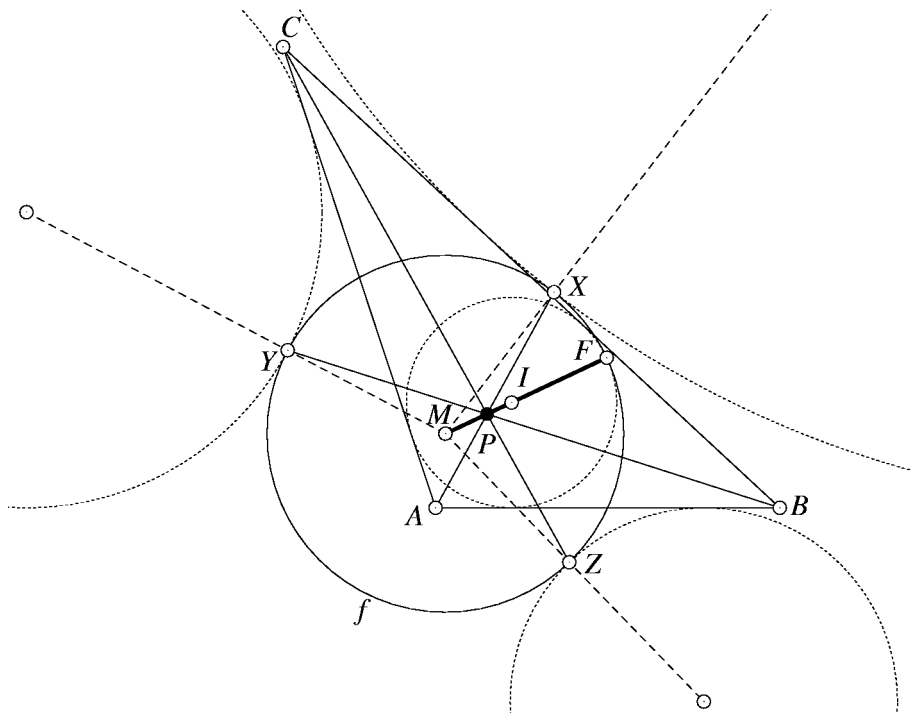


Abbildung 7: Satz von FEUERBACH und der ominöse Punkt  $P$

Beweise der beiden Aussagen mit Hilfe von baryzentrischen Koordinaten scheinen recht aufwendig zu sein und würden den Rahmen dieses Aufsatzes sicherlich sprengen. Eine ausführliche Behandlung der Punkte rund um diesen Satz von FEUERBACH findet sich in [9]. Dort wird gezeigt, dass der Punkt  $P$  der zum FEUERBACH-Punkt  $F$  harmonisch konjugierte Punkt bezüglich der Punkte  $M$  (Zentrum des Neunpunktekreises) und  $I$  (Inkreismittelpunkt) ist.

## 6 Rückblick

Unser Ausflug in die merkwürdigen Innereien des Dreiecks wollte weder Systematik und schon gar nicht Vollständigkeit beanspruchen, sondern dem Leser eine kleine Auswahl von überraschenden Entdeckungen im Dreieck vor Augen führen. Es bleibt zu hoffen, dass es immer noch geometrisch interessierte Gymnasiastinnen und Gymnasiasten gibt, welche sich an Merkwürdigkeiten im Dreieck freuen können. Ausgehend von einem Dreieck mit Inkreis und Ankreisen und ausgerüstet mit einem dynamischen Geometriesystem kann die Entdeckungsreise losgehen. Ein Einblick in trilineare oder baryzentrische Koordinaten setzt nebst trigonometrischen Kenntnissen allerdings etwas Matrizenrechnung und den Determinantenbegriff voraus. Für Gymnasiallehrer ist die Thematik immer noch ein reizvolles Gebiet, in welchem man sehr ausgiebig verweilen könnte.

Zum Abschluss wollen wir einige der wichtigsten merkwürdigen Punkte und Linien in einer „Landkarte“ festhalten, um auf einen Blick zu verdeutlichen, welche unglaubliche Zusammenhänge sich in der einfachsten geometrischen Figur, dem Dreieck, uns eröffnen können. Mögen sie den Leser anregen, weitere zu finden!

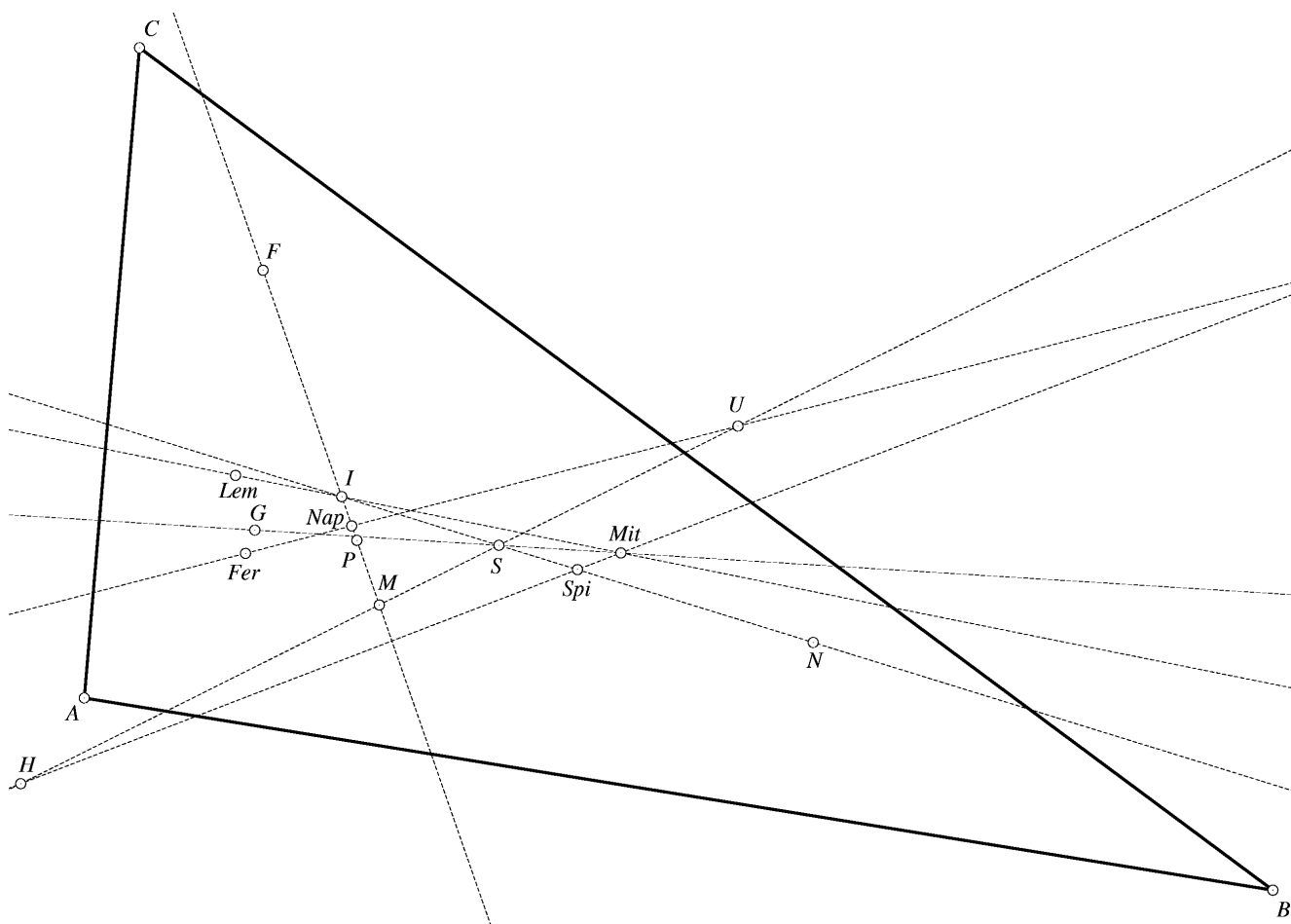


Abbildung 8: Einige klassische merkwürdige Linien und Punkte

Bemerkung: Zu den bisher erwähnten Punkten kommen in Abb. 8 noch die Punkte *Spi* (Spieker-Punkt), *Mit* (Mittenpunkt), *Fer* (Fermat-Punkt), *Lem* (Lemoine-Punkt) und *Nap* (Napoleon-Punkt), welche ihrerseits auf mindestens einer Geraden liegen, welche schon zwei merkwürdige Punkte enthält. Genauere Beschreibungen der Punkte findet man auf der tollen Internet-Seite von E. Weisstein in [7]. Die durch die Graphik nahegelegte Vermutung, dass der Napoleon-Punkt auch auf der Feuerbach-Geraden  $MF$  liegt, ist im übrigen falsch.

# Literaturverzeichnis

- [1] Peter Baptist: Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie. *BI-Wissenschaftsverlag, 1992*
- [2] Michael S. Longuet-Higgins: O the principal centers of a triangle. *Elem. Math. 56, 2001*
- [3] Clark Kimberling: Triangle Centers and Central Triangles. *Congressus Numerantium 129, 1998*
- [4] Heinz Bachmann: Vektorgeometrie. *Sabe, 1971*
- [5] Harold Scott Macdonald Coxeter: Introduction to Geometry. *Wiley Classics Library, 1961*
- [6] John R. Sylvester: Geometry, ancient and modern. *Oxford University Press, 2001*
- [7] Eric W. Weisstein: <http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenters.html>
- [8] Wolfgang Kroll: Elementarer Beweis des Satzes von Feuerbach. *Praxis der Mathematik 6/40, 1998*
- [9] Dan Pedoe: Circles: A Mathematical View. *Mathematical Association of America, 1995*