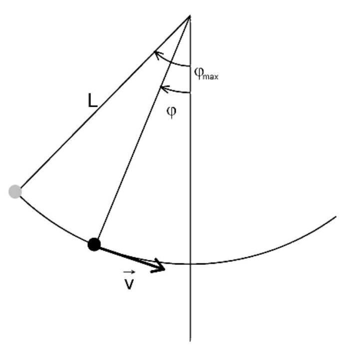
Maximale Beschleunigung eines Fadenpendels

M. Lieberherr
MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Wo tritt bei einem Fadenpendel die grösste Beschleunigung auf? Natürlich am Ort der maximalen Auslenkung! Wo tritt die grösste Beschleunigung auf, wenn man einen Körper an einer Schnur auf einem vertikalen Kreis herumschleudert? Natürlich im tiefsten Punkt! Das sagen wir unseren Schülerinnen und Schülern, wenn wir im Thema Schwingungen resp. im Thema Kreisbewegung sind. Aber steckt da nicht ein Widerspruch dahinter? Als mir das aufgefallen war, ging ich der Sache nach und fiel prompt auf die Nase: Einmal den Gültigkeitsbereich übersehen, einmal eine Lösung vergessen (und mehrmals verrechnet). Es tut gut zu wissen, dass ich auch nicht viel besser als meine Kundschaft bin.



Figur 1: Ein mathematisches Pendel der Länge L schwinge bis zum Winkel $0 < \phi_{\max} \leq 90^{\circ}$ aus. Der momentane Auslenkungswinkel sei ϕ.

Theorie

Die Beschleunigung der Punktmasse des mathematischen Pendels (Figur 1) hat eine Komponente parallel zur Bahn und eine senkrecht dazu. Die parallele Komponente hat die Grösse $gsin\phi$, für die zentripetale Komponente erhält man mit Hilfe des Energiesatzes $v^2/L = 2g(\cos\phi - \cos\phi_{\max})$. Damit resultiert für den Betrag der Gesamtbeschleunigung

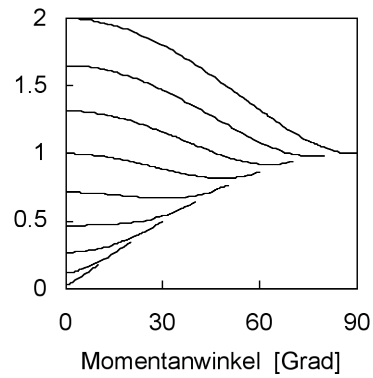
$$a = g(sin^2\phi + 4(cos\phi - \cos\phi_{\max})^2)^{1/2}$$

Erste Überraschung: Dieser Ausdruck ist auch noch für $\phi > \phi_{\max}$ mathematisch definiert. Der Definitionsbereich muss also "von Hand" auf den physikalisch sinnvollen Bereich $\phi \leq \phi_{\max}$ eingeschränkt werden. Da die Bewegung symmetrisch ist, brauchen wir nur $\phi \geq 0$ zu betrachten.

Um den Winkel zu bestimmen, bei dem die Beschleunigung maximal wird, lösen wir die Gleichung $da/d\phi = 0$ nach ϕ auf. Man erhält als erste stationäre Stelle $\phi_1 = 0$ und als zweite $\phi_2 = \arccos((4/3)cos\phi_{\max})$. Zeichnet man die Gesamtbeschleunigung a als Funktion des Momentanwinkels ϕ auf (Figur 2), so sieht man, dass die stationären Stellen ϕ_1 und ϕ_2 keineswegs immer bei Maxima liegen.

Das absolute Maximum liegt nur dann bei ϕ_1, wenn die Anfangsauslenkung $\phi_{\max} > \arccos(3/5) = 53.13..^{\circ}$ ist. Dieser Fall tritt natürlich ein, wenn man den Körper auf einem vertikalen Kreis herumschleudert. Dagegen ist bei einem Fadenpendel ϕ_1 meistens eine Minimalstelle oder gehört zu einem lokalen Maximum.

Die Lösung ϕ_2 von $da/d\phi = 0$ ist nur für $\phi_{\max} \geq \arccos((4/3) = 41.4..^{\circ}$ definiert und ist eine Minimalstelle. Warum behauptet man dann, dass das Fadenpendel bei der maximalen Auslenkung $\phi_{\max}$ am stärksten beschleunigt ist? Zweite Überraschung: Diese Extremalstelle findet man am Rand des physikalischen Definitionsbereichs, dort wo die Kurven in Figur 2 aufhören. Sie folgt nicht aus der Gleichung $da/d\phi = 0$! Tatsächlich tritt beim Fadenpendel die grösste Beschleunigung am Umkehrpunkt $\phi_{\max}$ auf, solange $\phi_{\max} < 53.13..^{\circ}$ erfüllt ist.



Figur 2: Gesamtbeschleunigung a der Pendelmasse eines idealisierten Fadenpendels in Einheiten der Fallbeschleunigung g als Funktion der momentanen Auslenkung ϕ. Die neun Kurven unterscheiden sich im Parameter $\phi_{\max}$ (maximale Auslenkung, Parameterwerte sind 10°, 20°, 30°, .. , 90°). Die Kurven haben den Endpunkt $(\phi_{\max}, sin\phi_{\max})$.