

# Computeralgebra zwischen Ohnmacht und Macht

U. Oswald, H.R. Schneebeli  
19. November 2002

Eine wesentliche Botschaft im Chemieunterricht lautet: Aus Eisen kann die Chemie kein Gold machen. Ähnlich gibt es prinzipielle Schranken in der Physik: Es gibt kein Perpetuum Mobile. Oder in der Mathematik: Die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal ist unmöglich. Alan Turing hat gleich zu Beginn des Computerzeitalters auf die prinzipiellen Grenzen von algorithmischen Methoden hingewiesen. Betreffen sie uns? Ein Beispiel aus dem Unterricht, in welchem das CAS des TI92+ nicht erkennt, dass ein Term 0 darstellt, gibt Anlass, Resultate von Daniel Richardson über prinzipielle Grenzen in der Macht der Computeralgebra zur Kenntnis zu nehmen. Die gute Nachricht zum Schluss: Die Grenze, die im Satz von Richardson auftritt, wird in den Beispielen nicht erreicht. Etwas lineare Algebra reicht aus, um die überraschend und spontan aufgetretene Schwierigkeit zu überwinden.

## 1 Eine Aufgabe, zwei Matrizen

Stellen Sie sich vor, Sie bereiten eine Prüfung vor und benötigen zwei Aufgabenserien mit verschiedenen Daten zu denselben Fragen. Das Thema: Matrizen und lineare Abbildungen im Raum.

### Aufgabe, Variante 1

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}$$

Beantworten Sie folgende Fragen durch formal exakte Rechnung mit dem CAS-Rechner:

1. Warum beschreibt die Matrix  $A$  bezüglich der Standardbasis eine Drehung von  $\mathbb{R}^3$ ?
2. Welcher Einheitsvektor beschreibt die Drehachse?
3. Wie gross ist der Betrag des Drehwinkels  $\alpha$ ?
4. Welches sind die Eigenwerte der Matrix  $A$ ?

### Lösungen mit dem TI92+

Bei (1) genügt es,  $A^T \cdot A = E$  mit  $E$  als Abkürzung für die Einheitsmatrix und  $\det(A) = 1$  nachzuweisen.

Bei (2) wird ein Einheitsvektor  $\vec{e}$  gesucht, der  $A\vec{e} = \vec{e}$  löst. Der Befehl für die reduzierte Zeilenstufenform  $\text{rref}(A - E)$  wird vom CAS im Gegensatz zur numerischen Prozedur  $\text{EigVc}$  formal exakt ausgeführt. Wir lesen aus dem Ergebnis von  $\text{rref}$  einen beliebigen Vektor  $\vec{d} \neq \vec{0}$  auf der Drehachse aus und normieren ihn anschliessend auf Länge 1. (Zwei

mögliche Antworten).

Bei (3) kann  $2 \cdot \cos(\alpha) = \text{Spur}(A) - 1$  formal nach  $\alpha$  aufgelöst werden:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{Spur}(A) - 1)\right)$$

Bei (4) hilft der Befehl `EigVl(A)` *nicht*, weil damit eine numerische und keine exakte Prozedur aufgerufen wird. Wir berechnen das charakteristische Polynom für  $A$  formal exakt mit  $\det(A - t \cdot E)$ . Das kubische Polynom macht dem CAS bereits Mühe. Der Befehl `Csolve` liefert nur numerische Näherungswerte. Die formal exakte Lösung erfordert mehr Einsicht in die zugrundeliegende Geometrie und Algebra. Weil die Matrix  $A$  eine Drehung beschreibt, treten Eigenwerte  $1, \exp(i\alpha), \exp(-i\alpha)$  auf, wobei  $\alpha$  den Drehwinkel bezeichnet. Das CAS vereinfacht die beiden Antworten  $\exp(\pm i \arccos(\frac{1}{2}(\text{Spur}(A) - 1)))$  wie erwartet.

Als Variante lässt sich im charakteristischen Polynom zu  $A$  der Linearfaktor  $t - 1$  abspalten. Der Quotient ist quadratisch und der Befehl `Csolve` liefert die beiden konjugiertkomplexen Eigenwerte ebenfalls formal exakt.

So weit so gut. Das CAS des TI92+ hat sich gut geschlagen aber die Aufgabe auch nicht trivialisiert, weil formal exakte Antworten verlangt sind.

## Aufgabe, Variante 2

Wir ersetzen in der Aufgabenstellung bloss die Matrix  $A$  durch folgende Matrix  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Völlig überraschend lautet die Antwort des CAS [TI92+] auf den Befehl `rref(B - E)` mit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{statt mit} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad u^2 + v^2 > 0$$

Die Antwort des CAS würde bedeuten, dass die Matrix  $B - E$  regulär ist. Das CAS findet im Mode `exact` bei der orthogonalen Matrix  $B$  keine Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Entsprechend beantwortet es die Eingabe `det(B - E) = 0` mit `false`. Warum erkennt das CAS den Term 0 nicht? Übrigens ist im Mode `approximate` `det(B - E) = 0` `true`.

## 2 Der Satz von Richardson

Daniel Richardson hat 1968 einige Ergebnisse veröffentlicht, die für algorithmische Formelmanipulation von grundlegender Bedeutung sind, unabhängig davon, ob Menschen oder Maschinen die Akteure sind. Wichtig sind seine Ergebnisse aber vor allem auch hinsichtlich unserer Erwartungen, was die Rechenmacht von Computeralgebrasystemen betrifft.

Das *Identitätsproblem* für eine gegebene Menge  $\mathcal{E}$  von Termen lautet: Gibt es ein Verfahren, mit welchem für zwei beliebige Terme aus  $\mathcal{E}$  entschieden werden kann, ob sie äquivalent sind oder nicht? Offenbar genügt es dazu, für einen beliebigen Term aus  $\mathcal{E}$  zu entscheiden, ob er äquivalent zum Nullterm ist oder nicht. Der Satz von Richardson besagt, dass das Identitätsproblem *unlösbar* ist: *Ein solches Verfahren gibt es nicht*, sofern die Terme aus  $\mathcal{E}$  eine

gewisse Komplexität haben. Genauer gesagt, setzt der Satz über  $\mathcal{E}$  voraus, dass darin zunächst Konstanten für die rationalen Zahlen und für  $\ln 2$  und  $\pi$  vorhanden sind sowie die Variable  $x$ . Weiter werden Funktionszeichen für die Identitätsfunktion, die Exponential-, die quadratische Wurzel- und die Sinusfunktion vorausgesetzt, und es wird die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{E}$  unter Addition, Subtraktion, Multiplikation und Funktionszusammensetzung verlangt.

Natürlich ist der Satz auf ein wirklich (in einem Rechner) existierendes CAS zunächst gar nicht anwendbar, da ein solches immer nur eine endliche Teilmenge von  $\mathbb{Q}$  darstellen kann. Darüber hinaus macht der Satz aber deutlich, dass bei einem (noch so raffinierten) Algorithmus auch eine beliebige Vergrößerung des Rechners nichts hilft: Es werden stets Terme übrigbleiben, welche dem Algorithmus trotzen.

Der Satz zerstört auch die Hoffnung auf einen Algorithmus, der sämtliche Terme aus  $\mathcal{E}$  auf Normalform bringt. Denn ein solcher Algorithmus müsste alle zum Nullterm äquivalenten Terme (und nur diese) in den Nullterm überführen. Dazu müsste er das Identitätsproblem lösen.

### 3 Hilfe für das CAS

Betrifft der Satz von Richardson das Beispiel  $\det(B - E) = 0$ ? Nein, denn das CAS des TI92 selbst lässt sich dazu bringen  $\det(B - E) = 0$  als gültig zu erkennen. Dazu ist es nötig, die Aufforderung  $\det(B - E)$  zweimal mit `expand(ans(1))` zu ergänzen. Dann erkennt das CAS, dass 0 die Antwort ist. Offenbar ist die automatische Vereinfachung zu früh abgebrochen worden. Das Beispiel ist übrigens numerisch keineswegs heikel, denn im `MODE approximate` findet das CAS die Antwort  $\det(B - E) = 0.0$  problemlos.

Erfolgreich ist übrigens die interaktive Behandlung der Matrix  $B - E$  mit den vorbereiteten Zeilenoperationen des TI92. Dabei zeigt sich, dass das CAS in der Zeilenstufenform die dritte Zeile nicht sofort als Nullzeile erkennt. Wir wissen aber, dass eine Nullzeile auftreten *muss* und können mit `expand` diese Darstellung auch erreichen. Andere Optionen sind der Befehl `Zeros` angewandt auf die Matrix  $B \cdot x - x$  in Listenform, wobei mit  $x$  eine Kolonnenmatrix mit drei Unbekannten bezeichnet wird. Wiederum stellt sich das Problem der Vereinfachung.

Alle übrigen Fragen lassen sich analog zum Beispiel  $A$  bearbeiten. Die komplexen Eigenwerte lassen sich mit Hilfe des Drehwinkels  $\beta$  zu  $B$  leicht auch in der Form  $\exp(\pm i \cdot \beta)$  formal exakt in der rechtwinkligen komplexen Schreibweise mit Wurzelzeichen angeben.

### Schlussbemerkungen

Was ist genau die Ursache für das abweichende Verhalten des CAS im Falle der Matrix  $B$ ? Wir wissen es nicht. Es ist interessant, den Untersuchungsgegenstand zu variieren. Dazu gibt es im Prinzip zwei Möglichkeiten: Die Daten oder die Prozesse können verändert werden.

Wenn das Verhalten des CAS bei der Matrix  $B$  durch die Geometrie bedingt wäre, so müssten bei allen zu  $B$  *ähnlichen* Matrizen die gleichen Probleme auftauchen. Die Matrix  $B^T$  ist zu  $B$  ähnlich. Erste Überraschung: Mit  $B^T$  hat das CAS des TI92 keine Probleme. Zweite Überraschung: Der Befehl `rref(C - E)`, angewandt auf die Matrix  $C = A^{-1}BA \sim B$ , liefert sogar undefinierte Terme. Die Geometrie kann also nicht Ursache für die hier aufgezeigten Schwierigkeiten sein. Das Problem scheint tiefer zu liegen. Eine Matrix  $M$  ist genau dann regulär, wenn  $\det(M) \neq 0$  gilt oder wenn `rref(M)` eine Einheitsmatrix als Antwort liefert. Das CAS des TI92 befindet sich richtigerweise, dass  $\det(C - E) = 0$  gilt. Es ist aber nicht in der Lage, den Befehl `rref(C - E)` richtig auszuführen. Eigene Experimente in diesem Umfeld können zu weiteren unerwarteten Reaktionen des CAS führen. Übrigens: die Antwort im `Mode approximate` war in allen Beispielen zuverlässig.

Wechseln wir noch das CAS für ein abschliessendes Experiment: Wenn  $\det(B - E)$  mit MuPAD formal berechnet wird, treten die genau gleichen Schwierigkeiten wie mit dem CAS des TI92 auf! Ist das ein Hinweis auf ein tieferliegendes Problem beim algorithmischen Vereinfachen von Termen? Oder gar ein Schatten des Satzes von Richardson, der beide CAS irritiert ganz ähnlich wie kleine Nenner manchmal in der Numerik Unheil anrichten?

Unsere Beispiele zeigen, dass der Einsatz eines CAS auch bei formal exakten Rechnungen spontan und unerwartet zu Problemen führen kann. Dann ist mathematischer Sachverstand gefordert. Ein CAS-Rechner ist eben auch nur ein Werkzeug, manchmal mächtig, aber keineswegs perfekt. Für den Anwender gibt es keinen Grund, der

Antwort eines CAS zu trauen. Es wäre aber blauäugig zu glauben, wir könnten jede Antwort des CAS mit einem Korrektheitsbeweis versehen. Wir müssen uns aber mindestens um die *Plausibilität der Antwort* kümmern.

Wenn *Invarianten* auftreten, lässt sich prüfen, ob das CAS diese Invarianten auch respektiert. So sollte der Rang einer Matrix beim Prozess `rref()` vom CAS niemals verändert werden. Oft ist es günstig, verschiedene Darstellungsarten oder *Lösungsvarianten* zu vergleichen, etwa eine numerische, eine graphische und wenn möglich eine formale. Wer beispielsweise  $\det(B - t \cdot E) \rightarrow f(t)$  ausführt und dann  $f(1)$  berechnet, findet mit dem TI92+ eine einfachere Antwort als mit  $\det(B - E)$ , nämlich

$$f(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} + \left(\frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3}$$

die sich offensichtlich zu 0 vereinfachen lässt. Es erstaunt, dass das CAS dies nicht ohne Hilfe von aussen bemerkt. Wir würden es von aufmerksamen Schülern erwarten.

## Literatur

- Jones, J.P., Matijasevic, Y. V.: Proof of the Recursive Unsolvability of Hilbert's Tenth Problem. Am. Math. Monthly, 98, 1991, pp 689 – 709.
- Caviness, B. F.: On Canonical Forms and Simplification, J. Assoc. Comp. Mach., 17. 1970, pp 385 – 396.
- Petkovsek, M., Wilf, H. S., Zeilberger, D.: A=B. Wellesley, MA: A. K. Peters, 1996.
- Richardson, Daniel: Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable. Journal of Symbolic Logic. Vol 33, No 4, Dec 1968, pp 514 – 520.