

Des coniques aux quadriques

Jean Piquerez

Collège et Ecole de commerce Madame de Staël

La géométrie plane élémentaire nous apprend que l'on peut obtenir toutes les coniques (dégénérées ou non) comme lieu géométrique des points dont le rapport des distances :

- à un point et à une droite (ellipses, paraboles ou hyperboles)
- à deux points (cercle ou droite)
- à deux droites sécantes ou parallèles (deux droites sécantes ou parallèles)

est constant.

Qu'en est-il des quadriques ?

Autrement dit, peut-on obtenir tous les différents types de quadriques en envisageant des lieux géométriques du même genre ?

Je me suis livré à une étude que j'espère exhaustive, n'ayant rien trouvé dans la littérature scientifique. A ce propos, tout lecteur pouvant me citer des références ou compléter éventuellement mon étude est le bienvenu.

1 Rapport des distances à deux points donnés A et B

On cherche les points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MB} = K$, où $K > 0$ est une constante. En prenant la droite (AB) pour axe (Ox) et OA pour unité de telle sorte que $A(1; 0; 0)$ et $B(\alpha; 0; 0)$ avec $\alpha > 1$, on obtient

$$\left(x - \frac{\alpha K^2 - 1}{K^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{K(\alpha - 1)}{K^2 - 1}\right)^2 \quad \text{si } K \neq 1$$

sphère de centre $M_0\left(\frac{\alpha K^2 - 1}{K^2 - 1}; 0; 0\right)$ et de rayon $R = \frac{K(\alpha - 1)}{|K^2 - 1|}$. Cette sphère est, bien entendu, obtenue par la rotation du cercle d'Apollonius de rapport K du segment $[AB]$ du plan xOy autour de l'axe (Ox) .

Si $K = 1$, il vient $x = \frac{1 + \alpha}{2}$, abscisse du milieu du segment $[AB]$, et le lieu géométrique cherché est un **plan**, le plan médiateur du segment $[AB]$ obtenu par rotation autour de l'axe (Ox) de la médiatrice du segment $[AB]$ dans le plan xOy .

2 Rapport des distances à un point A donné et à une droite d donnée

On suppose que $A \notin d$.

On prend le plan (A, d) pour plan xOy , la droite d pour axe (Oy) et OA pour unité sur l'axe (Ox) , ce dernier étant perpendiculaire à (Oy) et passant par A . On a donc : $A(1; 0; 0)$ et $d : x = z = 0$.

On note $\delta(M; d)$ la distance de M à d . Donc $\delta(M; d) = \|\vec{OM} \times \vec{u}\|$ avec $\vec{u}(0; 1; 0)$, vecteur unitaire de (Oy) .

On cherche les points M de l'espace tels que

$$\frac{MA}{\delta(M; d)} = K, \quad \text{où } K > 0.$$

Trois cas peuvent alors se produire :

- Si $K > 1$, on a

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec

$$u = x - \frac{1}{K^2 - 1}, \quad a = c = \frac{K}{K^2 - 1} \quad \text{et} \quad b = \frac{K}{\sqrt{K^2 - 1}}.$$

Il s'agit d'un **hyperboloïde de révolution à une nappe**.

- Si $K < 1$, on a :

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

avec

$$a = c = \frac{K}{1 - K^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}}.$$

Il s'agit d'un **ellipsoïde de révolution**.

- Si $K = 1$, il vient

$$y^2 = 2u, \quad \text{avec} \quad u = x - \frac{1}{2}.$$

Il s'agit d'un **cylindre parabolique**.

Cas particulier : Si $A \in d$, on a :

- $K > 1$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

avec $a = c = 1$ et $b = \sqrt{K^2 - 1}$. Il s'agit d'un **cône de révolution**.

- $K < 1$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

avec $a = c = 1$ et $b = \sqrt{1 - K^2}$. Il s'agit d'un ellipsoïde de révolution dégénéré, réduit à un **point**.

- $K = 1$: $y = 0$ et l'on a affaire à un **plan**.

3 Rapport des distances à un point A donné et à un plan p donné

On suppose $A \notin p$.

Si l'on trace par A un plan orthogonal quelconque à p , on se retrouve dans la situation de géométrie plane classique où l'on obtient hyperbole, parabole ou ellipse selon la valeur de K . Un tel plan, tournant autour de la droite orthogonale à p passant par A , ces trois coniques engendrent par rotation un **hyperboloïde de révolution à deux nappes**, un **paraboloïde de révolution** ou un **ellipsoïde de révolution** respectivement.

Cas particulier : si $A \in p$, on a :

- $K > 1 \Rightarrow$ **cône de révolution**
- $K < 1 \Rightarrow$ **ellipsoïde de révolution dégénéré**
- $K = 1 \Rightarrow$ **sphère dégénérée**.

4 Rapport des distances à deux droites données d_1 et d_2

4.1 d_1 et d_2 sont gauches

Il s'agit de loin du cas le plus complexe. On prend d_1 pour axe (Ox) et la perpendiculaire commune pour axe (Oz) (voir figure 1).

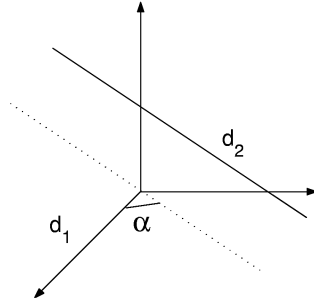


FIG. 1 – Situation dans le cas des deux droites gauches

Ainsi d_1 a pour vecteur directeur $\vec{u}_1(1; 0; 0)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\vec{u}_2(\cos \alpha; \sin \alpha; 0)$ avec $0 < \alpha \leq 90$. $(Oz) \cap d_2 = A$ et l'on choisit OA pour unité. On cherche donc l'ensemble des points tels que

$$\frac{\delta(M; d_1)}{\delta(M; d_2)} = K, \quad \text{où } K > 0$$

avec $\delta(M; d_1) = \|\vec{OM} \times \vec{u}_1\|$ et $\delta(M; d_2) = \|\vec{AM} \times \vec{u}_2\|$. Si $K \neq 1$, on trouve, en posant $v = z - \frac{K^2}{K^2-1}$:

$$(K \sin \alpha)^2 x^2 + (K^2 \cos^2 \alpha - 1)y^2 + (K^2 - 1)v^2 - 2K^2 \sin \alpha \cos \alpha xy = \frac{K^2}{K^2 - 1}$$

On fait alors une rotation d'axe (Ov) et d'angle φ , en posant

$$\begin{cases} t = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ u = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

et en déterminant φ de sorte que le terme en tu disparaisse.

On trouve alors $At^2 + Bu^2 + Cv^2 = D$, qui ne peut en aucun cas être un ellipsoïde, car la nature géométrique même du problème montre qu'il existe des points à l'infini. D'ailleurs comme $C > 0$, $D > 0$ et $AB < 0$, il s'agit d'un **hyperboloïde à une nappe**.

Comme, a priori, A , B et C sont distincts deux à deux, aucune de ces surfaces n'est de révolution.

Si $K = 1$, en posant

$$\begin{cases} t = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ u = x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ v = z - \frac{1}{2} \end{cases}$$

avec $\tan(2\varphi) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, il vient

$$At^2 - Au^2 = 2v.$$

Il s'agit d'un **paraboloïde hyperbolique**, les hyperboles étant équilatères.

4.2 d_1 et d_2 sont coplanaires

1. Sécantes :

Si $K \neq 1$, on obtient $At^2 + Bu^2 + Cz^2 = D$, avec t et u choisis comme précédemment.

Il s'agit donc d'un **cône du second ordre**, qui n'est pas une surface de révolution, les coefficients A , B et C n'étant pas du même signe, sinon seule l'origine des axes ferait partie du lieu, ce qui est absurde.

Si $K = 1$, on obtient $t = \pm u$. Il s'agit de **deux plans orthogonaux**.

2. Parallèles :

Ainsi $A(0; 0; 1)$ et $\vec{u}_2 = \vec{u}_1$.

Si $K = 1$, on obtient $z = \frac{1}{2}$, équation d'un plan équidistant des deux droites, comme on pouvait s'en douter.

Si $K \neq 1$, il vient

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{v^2}{c^2} = 1 \quad \text{avec } v = z - \frac{K^2}{K^2 - 1} \text{ et } b = c = \frac{K}{|K^2 - 1|}.$$

Il s'agit d'un **cylindre circulaire droit**, dont l'axe passe par le centre du cercle d'Apollonius déterminé par la section d'un tel cylindre avec n'importe quel plan orthogonal à l'axe du cylindre.

5 Rapport des distances à une droite donnée d et à un plan donné p

5.1 $d \cap p = \{A\}$

On prend pour plan xOy le plan p donné, et pour plan xOz le plan orthogonal à p et contenant d . Ainsi $\vec{n}(0; 0; 1)$ est le vecteur normal unitaire à p , et $\vec{u}(\cos \alpha; 0; \sin \alpha)$ avec $0 < \alpha \leq 90$ est le vecteur directeur unitaire de d .

On cherche donc l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\frac{\delta(M; d)}{\delta(M; p)} = K, \quad \text{où avec } \delta(M; d) = \|\vec{OM} \times \vec{u}\| \text{ et } \delta(M; p) = |\vec{OM} \cdot \vec{n}|.$$

Tous calculs effectués, on obtient

- **Un cône du deuxième ordre**, si $K \neq 1$
- **Un cône circulaire droit**, si $K = 1$.

5.2 $d \parallel p$ et $d \not\subset p$

Géométriquement, dans chaque plan orthogonal à d on retrouve hyperbole, parabole ou ellipse selon la valeur de K .

Par conséquent, le lieu géométrique cherché est un **cylindre hyperbolique, parabolique** ou **elliptique** respectivement.

5.3 $d \subset p$

C'est un cas particulier de , avec $\alpha = 0$ et l'on obtient

- $K > 1 \Rightarrow$ **deux plans sécants** d'équations $y = \pm \sqrt{K^2 - 1}z$
- $K = 1 \Rightarrow$ **un seul plan** d'équation $y = 0$
- $K < 1 \Rightarrow$ aucune solution.

6 Rapport des distances à deux plans p_1 et p_2 donnés

1. **Si p_1 et p_2 sont sécants**, on obtient deux plans sécants. On peut facilement s'en convaincre géométriquement en raisonnant dans un plan orthogonal à la droite $d = p_1 \cap p_2$.
2. **Si $p_1 \parallel p_2$** , alors on a :
 $K \neq 1 \Rightarrow$ **deux plans parallèles**
 $K = 1 \Rightarrow$ **un plan** équidistant des deux plans donnés.

7 Conclusion

En conclusion, il semble bien que l'on ne puisse pas obtenir toutes les quadriques de l'espace en envisageant le rapport des distances d'un point à deux sous-espaces affines de l'espace (point, droite ou plan).

En particulier, je n'ai pas pu obtenir de parabolöide hyperbolique dont les hyperboles obtenues par section par rapport à un des trois axes de coordonnées ne soient pas équilatères, ni d'ellipsoïde qui ne soit pas de révolution.

Avis de recherche : De quel ensemble de points de l'espace un ellipsoïde quelconque est-il le lieu géométrique ?