

Déterminant symbolique et formule de Cramer

Maxime Zuber¹, *Gymnase français de Biemme*

I. Introduction

Dans un espace vectoriel de dimension $n - 1$, une famille $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de n vecteurs, est forcément liée ; c'est-à-dire qu'il est possible d'écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ sous la forme d'une combinaison linéaire

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n,$$

autre que triviale. Dans le présent article, nous allons montrer comment déterminer les coefficients α_i et découvrir le sens géométrique de ces derniers.

Dimension 1

Si $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{e}$ et $\mathbf{b} = b \cdot \mathbf{e}$ sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E de base $\{\mathbf{e}\}$, alors la combinaison linéaire non triviale $\mathbf{0} = b \cdot \mathbf{a} - a \cdot \mathbf{b}$, donne le vecteur nul. Notons que cette dernière peut s'écrire sous la forme du déterminant symbolique

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ a & b \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dimension 2

Si, dans une base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ d'un espace vectoriel E de dimension 2, trois vecteurs non nuls ont pour composantes $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, alors le même déterminant symbolique

$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}, \quad (\star)$$

fournit une combinaison linéaire non triviale exprimant le vecteur nul $\mathbf{0}$. En effet, la composante x_i ($i = 1, 2$) du vecteur \mathbf{x} , qui est donnée par l'évaluation du déterminant

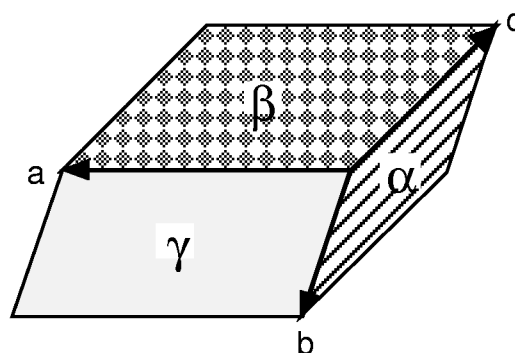
$$x_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

est nulle, car deux lignes de ce dernier sont égales ! En développant ce déterminant selon la première ligne, la relation (\star) se traduit sous la forme de la combinaison linéaire

$$\underbrace{\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})}_{\alpha} \cdot \mathbf{a} - \underbrace{\det(\mathbf{a}, \mathbf{c})}_{\beta} \cdot \mathbf{b} + \underbrace{\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{\gamma} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

dans laquelle le coefficient d'un vecteur est donné, au signe près, par l'aire du parallélogramme défini par les deux autres vecteurs.

¹Sur une idée originale de M. Alain Robert, professeur à l'Université de Neuchâtel.



Dimension 3

Le même raisonnement en dimension 3 conduit à la relation suivante (qu'on tire ordinairement de ladite *formule de Gibbs*)

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} = 0.$$

Ici également, le coefficient d'un vecteur est donné, au signe près, par le volume du parallélépipède construit sur les trois autres vecteurs. Ce dernier est défini par le *produit mixte* ou le déterminant des trois vecteurs.

II. Résultat général

Avec la même démonstration que celle présentée en dimension 2, on peut établir le résultat général suivant.

Théorème - Soit, dans un espace vectoriel E de dimension $n - 1$, une famille de n vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$, dont les composantes dans une base quelconque sont contenues dans les matrices colonnes $(\nu_1), (\nu_2), \dots, (\nu_n)$. On a alors la relation formelle

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n \\ (\nu_1) & (\nu_2) & \dots & (\nu_n) \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Cette dernière se traduit sous la forme de la combinaison linéaire

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

liant les n vecteurs linéairement dépendants et dans laquelle le coefficient α_i de chaque vecteur \mathbf{v}_i est donné, au signe près, par le déterminant des $n - 1$ autres vecteurs

$$\alpha_i = (-1)^{i+1} \det(\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, n, j \neq i).$$

III. Relation avec la règle de Cramer

Résoudre le système linéaire d'ordre n

$$(S) : \begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \dots + v_{1n}x_n = b_1 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \dots + v_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \dots + v_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

qui s'écrit

$$x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{b},$$

avec $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, revient précisément à trouver une combinaison linéaire non triviale

$$x_1 \cdot \mathbf{v}_1 + x_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{v}_n - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Or, en vertu de ce qui précède, on sait qu'il existe une combinaison de la forme

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{n+1} \cdot \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0},$$

avec $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{b}$ et $\alpha_i = (-1)^{i+1} \det(\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, n+1, j \neq i)$.

Deux cas peuvent alors se présenter. Si le déterminant du système est nul, c'est-à-dire si

$$\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1} \det(\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, n) = 0$$

, alors le système est singulier. En revanche, si ce déterminant est non nul, alors on a

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \cdot \mathbf{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} \cdot \mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot \mathbf{v}_n - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Il s'ensuit que l'inconnue x_k est donnée par

$$\begin{aligned} x_k &= (-1)^{n+1+k} \cdot \frac{\det(\mathbf{v}_j, j \neq k)}{\det(\mathbf{v}_j, j \neq n+1)} \\ &= \frac{\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{b}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)}{\det(\mathbf{v}_j, j \neq n+1)}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation n'est autre que la célèbre *formule de Cramer*.