

# Mathematische Modelle zum Kugelstossen

Urs Oswald und Hans Rudolf Schneebeli

Am Beispiel der Flugbahn beim Kugelstoss wird mathematische Modellbildung betrieben. Zuerst wird der Luftwiderstand vernachlässigt. Die expliziten Parameterdarstellungen der Flugbahn gestatten es, die Frage nach der maximalen Wurfweite formal zu beantworten. Dabei leistet ein CAS-Rechner gute Dienste. Das Extremalproblem wird auf drei verschiedene Arten angegangen. Dies erlaubt es, mit drei Methoden Erfahrungen zu sammeln und sie zu vergleichen. Die elementarste Methode ist auch die eleganteste, aber sie ist nicht verallgemeinerungsfähig. Alle 'exakten' Methoden versagen, wenn ein realistisches Modell für den Luftwiderstand verwendet wird. Dann muss das kontinuierliche Problem durch ein diskretes Ersatzproblem ersetzt werden, das sich numerisch bearbeiten lässt und im Prinzip auch für numerische Simulationen taugt. Mit der numerischen Methode lässt sich der Einfluss des Luftwiderstandes quantifizieren.

## Kugelstossen

Beim Kugelstossen werden Metallkugeln von 7.3 kg Masse durch menschliche Muskelkraft beschleunigt und geworfen. Daher ist die Geschwindigkeit der Kugel eher gering und der Luftwiderstand spielt eine untergeordnete Rolle. In der mathematischen Modellbildung kann daher der Wurf ohne Luftwiderstand als eine plausible Näherung betrachtet werden.

Angenommen, der Athlet stösst die Kugel auf einer Höhe  $h$  über der ebenen Standfläche mit einer Geschwindigkeit  $v_0$  und unter einem Elevationswinkel  $\varepsilon$  ab. Die Höhe  $h$  ist durch die Körpergrösse bedingt, die Geschwindigkeit  $v_0$  ist durch die Körperkraft und die Wurftechnik begrenzt. Bei welchem Winkel  $\varepsilon$  wird bei gegebenen Werten für  $h$  und  $v_0$  die grösste Wurfweite erzielt?

Nach dem Abstossen wird die Bewegung der Kugel alleine durch die Erdanziehung bestimmt. Eine Parameterdarstellung der Bahn lautet vektoriell geschrieben also

$$\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}_0 + t \cdot \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}t^2 \cdot \mathbf{g}$$

Nach Wahl entsprechender Koordinaten liest sich diese Darstellung der Bahn in Komponenten als

$$x : t \mapsto v_0 \cos(\varepsilon) \cdot t \quad \text{und} \quad y : t \mapsto h + v_0 \sin(\varepsilon) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2,$$

wobei  $g > 0$  die Erdbeschleunigung bezeichnet. Diese Beschreibung erlaubt es, die Bewegungen der Kugel im Rahmen des Modells zu simulieren und die Flugbahnen bei konkret gegebenen Daten für  $v_0$ ,  $\varepsilon$ ,  $h$  und  $g$  aufzeichnen zu lassen.

Wir gewinnen eine Art virtuelles Laboratorium für die Bahn der Kugel. Im Gegensatz zu Versuchen auf dem Sportplatz hat es den Vorzug, dass sämtliche Parameter exakt voreingestellt werden können.

Somit wäre eine Experimentierumgebung geschaffen, um verschiedene Fragen durch systematisches Probieren mit einem Computer zu untersuchen. Eine typische Frage könnte lauten: Welche Anfangsgeschwindigkeit benötigt eine Kugel, damit ein Athlet mit  $h = 2$  m eine maximale Wurfweite von 25 m erreicht? Die Antwort hängt eigentlich von der Wahl von *zwei* Parametern ab:  $v_0$  und  $\varepsilon$ . Es ist gar nicht so einfach, den von Praktikern bevorzugten Weg erfolgreich zu beschreiten. Bei gegebenem  $\varepsilon$  könnte das minimal erforderliche  $v_0$  für eine Wurfweite  $x_e = 25$  Metern mit Bisektion hinreichend exakt bestimmt werden und natürlich auch bei gegebenem  $v_0$  das beste  $\varepsilon$ . Aber die experimentelle Suche nach zwei unbekanntem Grössen verspricht aufwendig zu

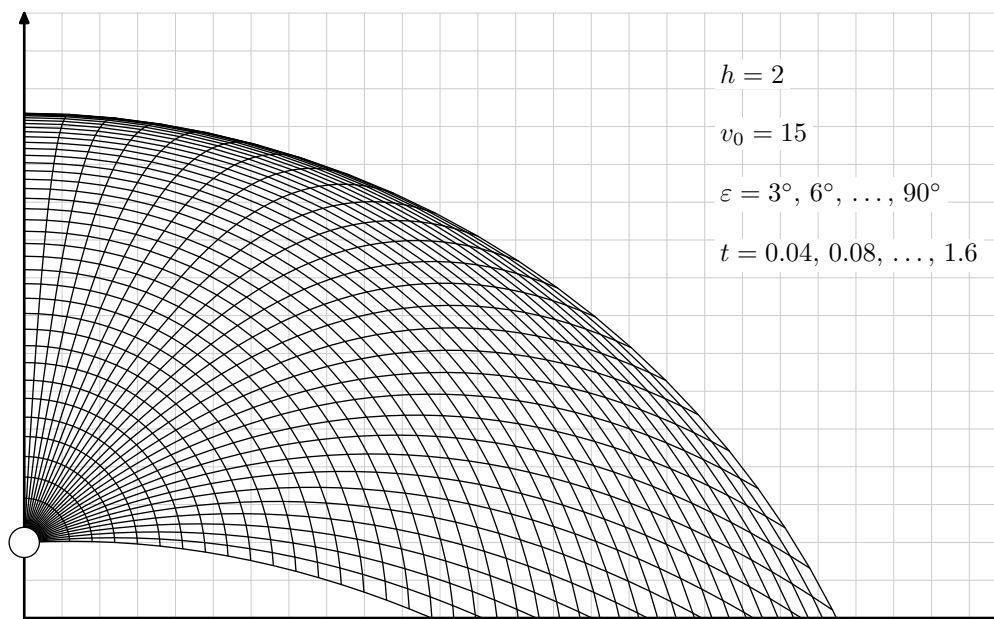


Abb 1. Flugbahnschar

werden. Vielleicht lohnt es sich, die Aufgabe analytisch anzugehen, einen formalen Zusammenhang zwischen der Wurfweite  $x_e$  und den Grössen  $\varepsilon$ ,  $h$  und  $v_0$  zu finden und ein Optimierungsproblem nach bekanntem Muster zu lösen.

Die Flugbahn der Kugel endet bei einer Wurfweite  $x_e$  mit dem Aufschlag zur Zeit  $t_e > 0$  auf der Höhe  $y_e = 0$ . Die Parameterdarstellung führt auf die Gleichung  $y(t_e) = 0$ . Diese ist quadratisch und hat die Normalform

$$t_e^2 - \frac{2v_0}{g} \sin(\varepsilon) t_e - \frac{2}{g} h = 0.$$

Wegen  $-\frac{2}{g}h < 0$  gibt es genau eine Lösung  $t_e > 0$ . Sie lautet

$$t_e = \frac{1}{g} \left( v_0 \sin(\varepsilon) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\varepsilon) + 2gh} \right)$$

Nun lässt sich die Wurfweite  $x(t_e)$  bestimmen. Die Rechnung ergibt

$$x(t_e) = \frac{v_0 \cos(\varepsilon)}{g} \left( v_0 \sin(\varepsilon) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\varepsilon) + 2gh} \right) \quad (1)$$

### So weit als möglich!

Sollte der Kugelstösser für einen Rekordversuch einen Elevationswinkel  $\varepsilon = 45^\circ$  wählen? Wie genau gelingt es dem gut trainierten Sportler, einen vorgegebenen ‘idealen’ Winkel zu erreichen und einzuhalten? Lohnt es sich eher, das Training auf einen hohen Wert von  $h$  oder auf maximales  $v_0$  auszurichten?

### Die Wurfweite als Funktion des Abgangswinkels

Bei sonst gleichen Bedingungen bestimmt der Winkel  $\varepsilon$  die Bahn und nach (1) die Wurfweite  $x_e$  bis zum Aufschlag auf der Höhe  $y = 0$ . Zur Verdeutlichung betrachten wir die Wurfweite als Funktion  $x_e : \varepsilon \mapsto x_e(\varepsilon)$  des Elevationswinkels. Für welches  $\varepsilon$  wird  $x_e(\varepsilon)$  maximal? Die Aufgabe scheint geeignet als Extremalproblem, um mit den Methoden der elementaren Analysis bearbeitet zu werden. Der Weg ist vorgezeichnet. Die Randwerte

$\varepsilon = \pm\pi/2$  ergeben die minimale Wurfweite 0. Also gibt es mindestens ein Maximum zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$ . Die Rechnung wird mühsam, wir überlassen sie einem CAS. Es findet für die Ableitung

$$\frac{d}{d\varepsilon}x(\varepsilon) = \frac{v_0^3 \cdot \sin(\varepsilon) \cos^2(\varepsilon)}{g \cdot W} + \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2(\varepsilon)}{g} - \frac{v_0 \cdot W \cdot \sin(\varepsilon)}{g} - \frac{v_0^2}{g},$$

wobei zur Abkürzung der Term  $\sqrt{2gh + v_0^2 \cdot \sin^2(\varepsilon)}$  mit  $W$  bezeichnet wurde.

Da nur Nullstellen von  $x'_\varepsilon$  interessieren, rechnen wir nur mit dem Zähler weiter. Es erweist sich als nützlich, Substitutionen vorzunehmen, bevor mit dem CAS Nullstellen gerechnet werden und zwar:  $\sin(\varepsilon) = s$  und  $\cos(\varepsilon) = c$ . Zusätzlich wird eine neue Gleichung benötigt:  $c^2 + s^2 - 1 = 0$ . Mit den Zusatzinformationen  $g > 0$ ,  $h > 0$ ,  $v_0 > 0$  findet der Nullstellensucher des CAS schliesslich

$$\cos(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2gh + v_0^2}}{\sqrt{gh + v_0^2}} \tag{2}$$

$$\sin(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{gh + v_0^2}} \tag{3}$$

Diese Antworten lassen sich zunächst so lesen:  $\varepsilon \approx 45^\circ$ , weil für die üblichen Werte von  $h$ ,  $g$ ,  $v_0$  folgt  $\sin(\varepsilon) \approx \cos(\varepsilon) \approx 1/\sqrt{2}$ .

Genauere Ergebnisse erfordern konkrete Daten. Wählen wir beispielsweise rekordverdächtige Werte  $h = 2$  m und  $v_0 = 15$  m/s, so ergibt sich mit dem Normwert  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> der ideale Wert  $\varepsilon \approx 42.7^\circ$  und eine entsprechende maximale Wurfweite von  $x = 24.85(5)$  Metern ohne Luftwiderstand.

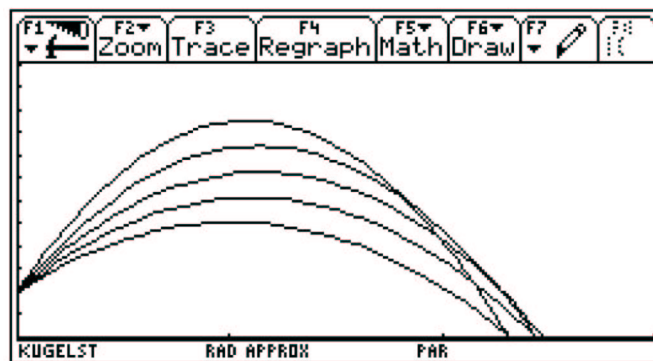


Abb 2. optimale Flugbahn und benachbarte Bahnen

### Die Wurfweite als Funktion von $v_0$ und von $h$

Wir betrachten die Wurfweite bei festen Werten für  $\varepsilon$ ,  $h$ ,  $g$  als Funktion von  $v_0$ . Ändert sich  $v_0$  und einen kleinen Wert  $\Delta v_0$ , so ändert sich die Wurfweite  $x$  in erster Näherung um

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial v_0} \Delta v_0$$

Mit den oben angenommenen Modellwerten und  $\Delta v_0 = 0.1$  m/s findet man  $\Delta x \approx 0.30(7)$  m.

Auf ganz analoge Art wird die Abhängigkeit der Wurfweite  $x$  von der Starthöhe  $h$  näherungsweise durch

$$\Delta x \approx \frac{\partial x}{\partial h} \Delta h$$

erfasst. Mit den Modellwerten von oben und  $\Delta h = 0.1$  m verlängert sich die Wurfweite im Vakuum um 0.09 m.

Schliesslich lässt sich die maximale Wurfweite im Vakuum auch formal darstellen. Dazu dient die Darstellung

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{\sqrt{gh + v_0^2}}\right),$$

die mit dem CAS im Term  $x(\varepsilon)$  eingesetzt und vereinfacht wird zu

$$x_{\max}(v_0, h) = \frac{v_0}{g} \sqrt{2gh + v_0^2}. \quad (4)$$

Diese Formel erklärt, warum sich  $v_0$  viel stärker auf die maximale Wurfweite  $x_{\max}(v_0, h)$  auswirkt als  $h$ . Die Taylorentwicklung würde bei Bedarf alle Einzelheiten genauer aufschlüsseln.

## Diskriminante

Angenommen, die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  sei konstant. Im Startpunkt wird einzig der Abgangswinkel  $\varepsilon$  variiert. Wie muss  $\varepsilon$  gewählt werden, damit ein gegebener Punkt  $Z(p|q)$  von der Bahn erreicht wird? Diese Frage scheint ein rein geometrisches Problem zu sein. Daher ist es zweckmässig, die Dynamik der Bahnbewegung auszublenden. Das lässt sich machen, indem die Zeit  $t$  aus der Parameterdarstellung eliminiert wird. Dann entsteht eine statische Beschreibung der Bahnkurve als Gleichung zwischen den Koordinaten  $x$  und  $y$ . Die Bahngleichung lautet:

$$y = h + \tan(\varepsilon) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2(\varepsilon)) \cdot x^2. \quad (5)$$

Der Punkt  $Z(p|q)$  ist genau dann erreichbar, wenn es ein  $\varepsilon$  gibt, für welches das Koordinatenpaar  $(p|q)$  die Einsetzprobe in Gleichung (5) besteht. Das Problem besteht also im Kern darin, bei gegebenen  $(p|q)$  eine quadratische Gleichung für  $\tan(\varepsilon)$  zu lösen. Nun ist klar, dass es in der Ebene *erreichbare* und *unerreichbare* Punkte gibt. In der Regel liegt ein erreichbarer Punkt auf zwei Bahnen. In Ausnahmefällen, wenn in der Gleichung (5) für  $\tan(\varepsilon)$  die Diskriminante verschwindet, gibt es nur eine Bahn durch  $Z$ . Diese Ausnahmepunkte markieren die Grenze zwischen den erreichbaren und den unerreichbaren Punkten, die sogenannte *Hüllkurve*. Ein Punkt liegt bei gegebener Zielhöhe genau dann in maximaler Reichweite, wenn er zur Hüllkurve gehört. Deshalb ist es interessant, eine Gleichung für die Hüllkurve zu kennen. Die Gleichung (5) mit  $\tau = \tan(\varepsilon)$  lautet

$$q = h + p \cdot \tau - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tau^2) \cdot p^2.$$

Ihre Diskriminante ist genau dann gleich Null, wenn

$$q = -\frac{g}{2v_0^2} p^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h \quad (6)$$

gilt. Die Hüllkurve ist daher eine Parabel. Koeffizientenvergleich in (6) mit (5) zeigt, dass sie genau übereinstimmt mit der Bahn eines Massepunktes, der auf der  $y$ -Achse bei  $y_0 = \frac{v_0^2}{2g} + h$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  horizontal startet.

Erstaunlicherweise lässt sich die Frage nach der maximalen Wurfweite also auch ohne Differentialrechnung beantworten: Bei gegebener Zielhöhe  $q$  ist die maximale Reichweite die positive Lösung  $p$  der Gleichung

$$p^2 = \frac{1}{g^2} (v_0^4 + v_0^2 \cdot 2g(h - q)).$$

Für  $q = 0$  stimmt das Ergebnis

$$p = x_{\max} = \frac{1}{g} \sqrt{v_0^4 + v_0^2 \cdot 2gh}$$

mit dem früher gefundenen Resultat (4) überein.

Die ‘elementare’ Methode hat einen Nachteil: Sie versagt, sobald der Luftwiderstand physikalisch sinnvoll modelliert wird.

## Reguläre Abbildungen

Die Beschränkungen der elementaren Methode lassen sich aufheben. Betrachten wir also die Bahn der schweren Kugel, die in  $(0|h)$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  abgestossen wird. Ihre Position lässt sich als Funktion  $\mathbf{x} : (\varepsilon|t) \mapsto \mathbf{x}(\varepsilon, t)$  auffassen, die das Gebiet  $D$  der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit Koordinaten  $(\varepsilon|t)$  mit  $-\pi/2 < \varepsilon < \pi/2$  und  $t > 0$  in eine Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit Koordinaten  $(x|y)$  abbildet. Welche Eigenschaften sind von der Abbildung  $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu erwarten? Wenn die Bahnen Lösungen von Differentialgleichungen sind, so wird  $\mathbf{x}$  eine differenzierbare Abbildung sein. Die Bildmenge in der  $(x|y)$ -Ebene ist die Menge  $E$  der erreichbaren Punkte. Wir interessieren uns für den Rand dieser Menge. Die Punkte im Innern der Menge  $E$  haben die Eigenschaft, dass es lokal zwei Koordinatenbeschreibungen gibt: Eine kleine Veränderung von  $t$  bei festem  $\varepsilon$  zeichnet ein Stück einer  $t$ -Linie als Flugbahn injektiv und eine kleine Variation von  $\varepsilon$  zeigt, wie sich die Flugbahn lokal verschwenken lässt, wenn der Anfangswinkel sich leicht ändert. Diese Vorstellung entspricht dem Verhalten von  $\mathbf{x}$  in einem regulären Punkt. Die Abbildung  $\mathbf{x}$  ist dann lokal eine Koordinatentransformation zwischen den  $(\varepsilon|t)$ -Koordinaten und den  $(x|y)$ -Koordinaten. Global ist  $\mathbf{x}$  nicht injektiv, weil durch jeden Punkt im Innern eine steile Flugbahn mit langer Flugzeit und eine flache Bahn mit kurzer Flugzeit verläuft. Nur wenn ein Bildpunkt auf die Grenze zu den unerreichbaren Punkten fällt, wird die Abbildung  $\mathbf{x}$  singular. Nach dem Satz über die Umkehrabbildung liegt also genau dann ein Randpunkt von  $\mathbf{x}(D)$  vor, wenn die Jacobimatrix  $J$  von  $\mathbf{x}$  singular wird. Wir erwarten also, dass die Bedingung  $\det(J(\mathbf{x})) = 0$  die Hüllkurve der Flugbahnschar beschreibt und zwar unabhängig von den speziellen Annahmen zum Luftwiderstandsgesetz. Freilich leben wir mit der Fiktion, dass die Funktion  $\mathbf{x}$  explizit bekannt sei. Das braucht nicht zwingend der Fall zu sein. Für praktische Zwecke könnten auch numerische Näherungen an  $\mathbf{x}$  den Zweck erfüllen.

Kehren wir aber zurück zu unserem ursprünglichen Modell. Dann wird

$$\mathbf{x}(\varepsilon, t) = (v_0 \cos(t), h + v_0 \sin(t) - \frac{1}{2}gt^2)$$

Die Bedingung  $\det(J(\mathbf{x})) = 0$  übersetzt sich dann als

$$v_0 t \cdot (gt \sin(\varepsilon) - v_0) = 0$$

Auflösen nach  $t$  ergibt  $t_0 = 0$  oder  $t(\varepsilon) = v_0/(g \cdot \sin(\varepsilon))$ . Daraus folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} x(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{v_0^2}{g \cdot \tan(\varepsilon)} \\ y(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= h + \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g \cdot \sin^2(\varepsilon)} \end{aligned}$$

eine mit  $\varepsilon$  parametrisierte Darstellung der Hüllkurve. Der Parameter  $\varepsilon$  lässt sich eliminieren, und es entsteht die schon in (6) bei leicht verschiedener Notation elementar hergeleitete Gleichung

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} + h$$

## Luftwiderstand

Wie realistisch war die Annahme, dass der Luftwiderstand vernachlässigbar sei? Wir betrachten eine Modellflugbahn mit  $\varepsilon = 45^\circ$ ,  $h = 2$  m und  $v_0 = 15$  m/s. Im luftleeren Raum ergibt sich aus (4) eine Wurfweite von 24.86 m. Wie gut stimmt diese theoretische Voraussage mit der Wirklichkeit überein?

Die Modellierung der Flugbahn einer Kugel im luftgefüllten Raum erfordert Annahmen über den Luftwiderstand. Es ist plausibel, von einem Kraftgesetz der Art

$$R(v) = -c_w \cdot A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad (7)$$

auszugehen, das erfahrungsgemäss für turbulente Strömungen und kleinere Geschwindigkeiten gilt. Die Konstante  $c_w$  ist der Widerstandsbeiwert. Er ist für Kugeln bekannt. Mit  $A$  wird die Querschnittsfläche der Kugel

bezeichnet,  $\rho$  steht für die Luftdichte und  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  bezeichnet die Grösse der Momentangeschwindigkeit der Kugel. Aus Newton's Kraftgesetz folgt mit (7) die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit der Kugel  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ . Sie lautet

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + \frac{R(v)}{m \cdot v} \mathbf{v}$$

oder in Komponenten geschrieben

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_x &= \frac{R(v)}{m \cdot v} \cdot v_x \\ \dot{v}_y &= \frac{R(v)}{m \cdot v} \cdot v_y - g \end{aligned}$$

Unter Verwendung numerischer Werte für alle Parameter lässt sich dieses System numerisch annähern. Wir benutzen dazu numerische Differentialgleichungslöser (Euler, Runge-Kutta) des CAS-Rechners mit einer Schrittweite von 0.01 Sekunden und folgenden Daten:  $c_w = 0.47$ ,  $A = 0.0456 \text{ m}^2$ ,  $m = 7.2 \text{ kg}$ ,  $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v_0 = 15 \text{ m/s}$ ,  $\varepsilon = 45^\circ$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Die Position  $(x(t)|y(t))$  der Kugel lässt sich für eine Liste ausgewählter Zeitpunkte  $t$  als Tabelle anzeigen. Längen erscheinen in der Tabelle in Metern, Zeiten in Sekunden. Der Index  $v$  bezeichnet die Bahn im Vakuum. Die Indizes  $E$  und  $R$  beziehen sich auf die Integrationsmethode beim Modell mit Luftwiderstand.

Zeit	$x_v$	$y_v$	$x_E$	$y_E$	$x_R$	$y_R$
2.30	24.40	0.45	23.76	0.45	23.75	0.34
2.32	24.61	0.21	23.96	0.21	23.96	0.10
2.33	24.71	0.08	24.06	0.09	<b>24.05</b>	-0.02
2.34	<b>24.82</b>	-0.04	<b>24.16</b>	-0.03	–	–

Numerische Integration der Bewegungsgleichungen  
 $v$ : Vakuumbahn,  $E$ : Eulerverfahren,  $R$ : Runge-Kutta-Verfahren.

Die maximalen Werte in der Tabelle müssen noch geringfügig korrigiert werden, weil bei den aufgeführten Flugzeiten die Bedingung  $y_* = 0$  nicht exakt erfüllt wird. Die auf die Höhe 0 korrigierten und auf 0.01 m gerundeten Tabellenwerte lauten

$$\tilde{x}_v \approx 24.79\text{m} \quad \tilde{x}_E \approx 24.13\text{m} \quad \tilde{x}_R \approx 24.03\text{m}$$

Die Daten zeigen, dass die berechneten Wurfweiten auch von der Art der Simulation abhängen und nicht nur vom gewählten Modell. Der Wert nach dem Euler-Verfahren übertrifft jenen der Methode von Runge-Kutta um rund 0.1 m. Verglichen mit der Vakuumbahn betragen die Verkürzungen beim Modell mit Luftwiderstand allerdings 0.66 m beziehungsweise 0.76 m. Solche Diskrepanzen sind eher überraschend. Sie lassen auch die Genauigkeit der Daten von Rekordwerten im Kugelstossen in einem neuen Licht erscheinen. Welche Rolle spielen etwa eine geringere Luftdichte oder Wind? Jedenfalls wird klar, dass eine genaue Simulation neben einem sorgfältig erarbeiteten dynamischen Modell auch verlässliche numerische Verfahren und genaue Daten erfordert, wenn die Wirklichkeit bis in Einzelheiten nachgebildet werden soll.

Bisher wurde die Annahme  $\varepsilon = 45^\circ$  getroffen. Wie gross wäre der optimale Abschusswinkel, wenn der Luftwiderstand berücksichtigt wird? Diese Frage wird hier nicht exakt beantwortet. Die maximale Reichweite wurde für die Vakuumbahn mit (4) bereits zu 24.85(5) m bestimmt. Es ist plausibel anzunehmen, dass auch auf der wirklichen Bahn eine vergleichbare Steigerung der Wurfweite von rund 0.06 m durch Wahl des theoretisch optimalen Anfangswinkels zu erzielen wäre. Gelingt es aber, beim Werfen den optimalen Anfangswinkel zuverlässig einzuhalten? Und wie liesse sich das überprüfen?

Es lohnt sich, Athleten im Kugelstossen so zu trainieren, dass sie in erster Linie der Kugel eine grosse Anfangsgeschwindigkeit verleihen. In zweiter Linie soll die Kugel hoch abgestossen werden mit einem Elevationswinkel von knapp  $45^\circ$ . Hingegen macht es wenig Sinn, danach zu trainieren, den optimalen Elevationswinkel genau einzuhalten.

Hätten Praktiker nicht intuitiv diesen Schluss auch gemacht? Gut für die Praxis und gut für unsere Modellbildung!