Discontinuité inattendue

Jean Piquerez

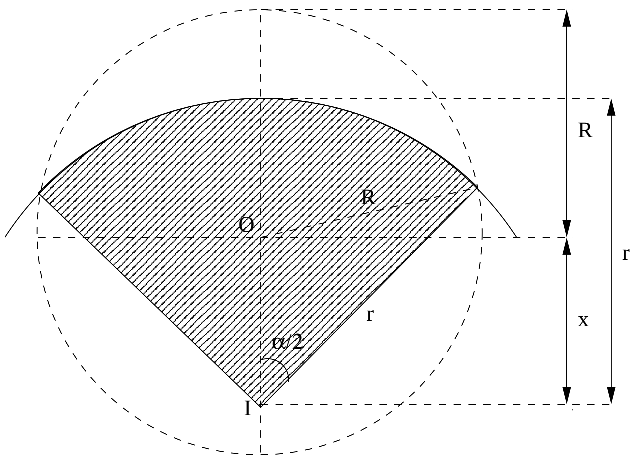
Collège et Ecole de commerce Madame de Staël

Dans le livre de la DMK intitulé *"Analysis"*, on trouve en page 85 le problème 184 classique suivant : *"Inscrire dans un cercle de rayon R donné un secteur d'aire maximale."* On notera r son rayon et α son angle au centre.
C'est déjà en soi un très intéressant problème d'optimisation. Je dispense le lecteur des détails du calcul mais rappelle que l'aire A d'un tel secteur peut s'écrire :

$$A(\alpha) = 2\alpha R^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2}) \qquad \text{avec } \alpha \in [0; \pi]$$

$$A'(\alpha) = 2R^2 \cos(\frac{\alpha}{2}) \cdot \left[\cos(\frac{\alpha}{2}) \quad \alpha \sin(\frac{\alpha}{2})\right] \qquad \text{avec } \alpha \in [0; \pi]$$

et l'aire est maximale lorsque $\alpha = \cot(\frac{\alpha}{2})$, c. à d. environ 1,3065 comme l'indique le livre.
Pour cette valeur de α , le rapport $k = \frac{r}{R}$ vaut environ 1,588.
Mes réminiscences scolaires d'allemand étant devenues quasiment rachitiques, après plus de trois décennies sans aucune pratique, j'ai interprété le texte un peu différemment, en imaginant que le centre du secteur pouvait être intérieur au cercle et non sur le cercle, ce qui, curieusement, débouche sur un problème bien plus captivant. On suppose dès lors que r et R sont donnés et que seul α varie. Remarquons déjà que si $r \leq R$, alors on peut



"inscrire" le cercle de rayon r tout entier, les deux cercles étant concentriques et $\alpha = 2\pi$.
Remarquons en outre que, si $r > 2R$, aucun secteur n'est inscriptible, et que si $r = 2R$, à l'évidence $\alpha = 0$.
Le problème n'offre donc d'intérêt que si $R < r < 2R$.

Posons alors $OI = x$ avec $r \quad R \leq x \leq R$.
Alors on a : $R^2 = x^2 + r^2 \quad 2rx\cos(\frac{\alpha}{2})$
$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{x^2+r^2 \quad R^2}{2rx}$.
Donc l'aire du secteur hachuré est donnée par

$$A(x) = \arccos\left(\frac{x^2+r^2 \quad R^2}{2rx}\right) \cdot r^2$$

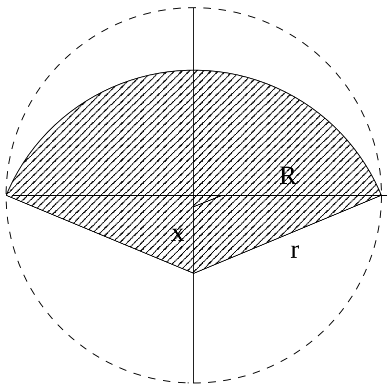
$$A'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 \quad \frac{x^2+r^2 \quad R^2}{2rx}\Big)^2}} \cdot \frac{r}{2} \cdot \left(\frac{r^2 \quad R^2}{x^2} \quad 1\right)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1. $\underline{R < r \leq R\sqrt{2}}$
   alors $r^2 \quad R^2 < R^2 \Rightarrow \sqrt{r^2 \quad R^2} < R$
   et comme $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{r^2 \quad R^2} < R$, on a le tableau de variation suivant :

x	$r \quad R$		$\sqrt{r^2 \quad R^2}$		R
$A'(x)$	$\|\|$	$+$	0		
$A(x)$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	$+$

   et l'aire maximale vaut $\arccos\left(\frac{\sqrt{r^2 \quad R^2}}{r}\right) \cdot r^2$
   Dans un tel cas on obtient même une construction de l'aire maximale grâce à la relation pythagoricienne $x^2 = r^2 \quad R^2$:



2. $\underline{R\sqrt{2} \leq r \leq 2R}$
   Alors on a :

x	$r \quad R$		R
$A'(x)$	$\|\|$	$+$	$+$
$A(x)$	0	$\nearrow$	

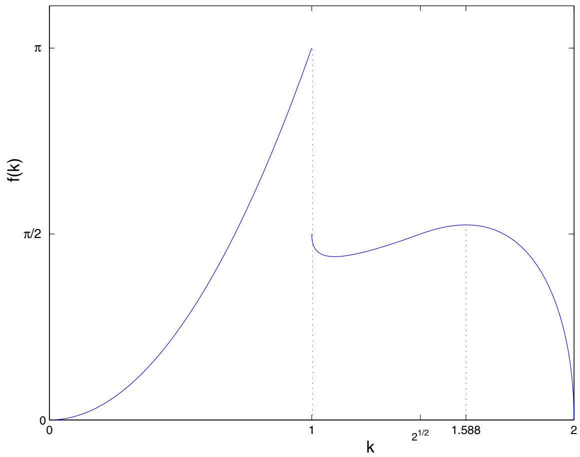
   et l'aire maximale vaut $\arccos \quad \frac{r}{2R}\Big) \, r^2$
   Dans ce cas, le secteur d'aire maximale a bel et bien son centre sur le cercle de rayon R.

Etudions maintenant la variation de l'aire maximale en fonction du rapport $k = \frac{r}{R}$.

– Si $0 < k \leq 1$, alors $A_{max} = \pi r^2 = \pi k^2 R^2$
– Si $1 < k \leq \sqrt{2}$, alors $A_{max} = k^2 \arccos\left(\frac{\sqrt{k^2 \quad 1}}{k}\right) R^2$
– Si $\sqrt{2} \leq k \leq 2$, alors $A_{max} = k^2 \arccos \;\; \frac{k}{2}\big) R^2$

Le graphique de la fonction f définie par : $f(k) = \begin{cases} \pi k^2, & \text{si } 0 \leq k \leq 1 \\ k^2 \arccos\left(\frac{\sqrt{k^2 \quad 1}}{k}\right), & \text{si } 1 < k \leq \sqrt{2} \\ k^2 \arccos \;\; \frac{k}{2}\big), & \text{si } \sqrt{2} \leq k \leq 2 \end{cases}$

se présente ainsi :



Deux particularités sont à observer :

– La discontinuité à droite de f en 1.
En effet, lorsque $r = R$, on peut "inscrire" le cercle de rayon r tout entier et l'aire du secteur vaut πR^2, mais dès que $r > R$, pour des valeurs proches de R, l'aire du secteur est inférieure à la moitié de celle du cercle de rayon R.
En effet,

$$\lim_{k \to 1^+} k^2 \arccos\left(\frac{\sqrt{k^2 \quad 1}}{k}\right) = \frac{\pi}{2}$$

– Pour des valeurs de k comprises entre $\sqrt{2}$ et 2, le secteur d'aire maximale a son centre sur le cercle de rayon R et, parmi tous ces secteurs, celui de plus grande aire est bien entendu celui qui avait été déterminé en réponse à l'exercice du livre cité au début de cet article. Donc le maximum local de f sur l'intervalle $[\sqrt{2}; 2]$ se fait pour $k \cong 1,588$ et il vaut $1,6478 > \frac{\pi}{2}$.