



CAS: Rohes und Gegartes

Rüede Christian, Kantonsschule Büelrain, 8400 Winterthur

Reise ins Paradies?!

Was hat ein Fotoapparat mit einem CAS-Taschenrechner gemeinsam? (CAS steht für Computeralgebra-System) – Beide haben das Potential, das ihnen entsprechende Handwerk zu verdrängen; Handwerk im wörtlichen Sinn. Der Fotoapparat liefert eine naturgetreue Abbildung der Wirklichkeit und kann so die kunsthandwerklichen Fähigkeiten einer Malerin überflüssig machen. Tatsächlich ging mit der Verbreitung der Fotografie eine Revolution in der Malerei einher. Analog kann ein gutes CAS die mühsamen technischen, von-Hand-Rechnungen übernehmen. So fragt sich: muss man beim CAS im Hinblick auf den Mathematikunterricht von Revolution, Evolution oder von einem Blindgänger sprechen? – Um sinnvoll Antwort geben zu können, werden im Folgenden die Begriffe Mathematik und Lernen und deren Verbindung, Mathematiklernen, seziert und dabei mit einem Auge auf das CAS geschleift. Wie lerne ich Mathematik? Verbessert, unterstützt oder hindert ein CAS den Lernprozess? Welche Rolle kann das CAS im Theaterstück Mathematiklernen einnehmen? Im Hinterkopf steht der Wunsch nach einer Konzeption des Mathematikunterrichts im Zeitalter des CAS-Taschenrechners. Ein Agieren mit Konzept und nicht ein Reagieren ohne Konzept ist das Ziel. Deshalb wird die Diskussion in einen grösseren Rahmen gestellt.

Momentaufnahme

Notwendiges Mauerblümchendasein des CAS in der angewandten Mathematik: Mittlerweile liegen schon etliche Vorschläge vor, wie ein CAS-Taschenrechner im Unterricht eingebaut werden kann [1]. Wer diese Literatur durchgeht, findet zum Teil sehr schöne Beispiele und stellt sogleich fest, dass CAS-Taschenrechner mehrheitlich bei Anwendungen eingesetzt werden. Dabei kommen vorwiegend die numerischen und grafischen Fähigkeiten dieser Taschenrechner zum Zuge, die Möglichkeiten des CAS werden weniger ausgeschöpft. Das liegt in der Natur der Sache. Denn bei Anwendungen interessieren in der Regel die numerischen Resultate und geeignete Visualisierungen des Zahlenmaterials. Dass dabei die Numerik- und Grafikmodule des CAS-Taschenrechners dominieren, ist (zwingend) kohärent mit dem Wesen von angewandter Mathematik. Die Rolle des CAS wird im Bereich der angewandten Mathematik deshalb marginal bleiben. Die Frage, inwiefern mit der gesteigerten Relevanz der behandelten Anwendung auch das Verstehen derselben gesteigert wird, lässt sich zur Zeit nicht beantworten und gehört streng genommen gar nicht zur hier gestellten Kernfrage.

CAS-Löcher wie im Emmentalerkäse bei der reinen Mathematik: Die Stossrichtung eines CAS ist näher am Automatischen Beweisen als an der Numerik. Folglich ergeben sich natürliche Fragestellungen, die mit dem CAS zu behandeln wären, eher in der reinen Mathematik. In der Literatur [1] sind Vorschläge dazu allerdings dünn gesät. Da besteht Nachholbedarf. Zum Beispiel mag nur schon die Bewusstmachung, Diskussion, und Begründung der syntaktisch unterschiedlichen Behandlung im CAS vom Gleichheitszeichen bei Gleichungen (solve) und Termumformungen (expand, factor, Enter-Taste, etc.) zur Vermeidung typischer Schülerinnenfehler in diesem Bereich beitragen. Auch solch unterstützende, lapidare und natürliche Vorschläge sollen vermehrt festgehalten werden. Es soll im CAS-Zeitalter eine Auswahlpalette von Unterrichtsideen in der reinen Mathematik, insbesondere der Algebra, zur Verfügung stehen. Andernfalls ist die Versuchung gross, dem Reiz der Anwendung zu unterliegen und Kapitel der reinen Mathematik aus den Stoffplänen zu streichen – sie können ja oft durch einen Tastendruck auf dem CAS-Taschenrechner kompensiert werden.

Das tägliche Brot im Leben der Mathematikerin

Viele Wege führen zur mathematischen Intuition: Wie sieht mathematisches Arbeiten aus? Was führt zu Vermutungen, Beweisideen und sinnvollen Definitionen? Mathematische Intuition – und die wollen wir ja alle fördern – ist ein schwierig zu fassender Begriff. Etwas, das per Definition dem Nichtsprachlichen zuzuordnen ist, kann sprachlich nicht explizit gemacht werden. So frage ich anders: wie kann mathematische Intuition entstehen? – Vielleicht kann eine ständige Präsenz von Beispielen dienlich sein. Beispiele, die völlig durchschaubar sind und durchschaut werden. Beispiele, die ohne Hilfsmittel aus dem Stand im Kopf durchdacht werden können. Beispiele, die entschlackt, kristallklar und fassbar sind. Die Mathematiklernenden sollen an solchen Beispielen mathematische Ideen erkennen, aufzeigen, nachvollziehen, begründen, verallgemeinern, vermuten und beweisen. Der Einsatz des CAS ist hier nicht vorgesehen. Allerdings hat das CAS (wie die dynamische Geometriesoftware) eine neue, andere Art Heuristik hervorgerufen: das CAS als Messapparat. In der Literatur [2] wird vorgeschlagen, in einem ersten Schritt das CAS als Blackbox zu behandeln und mit Anfangsdaten zu füttern. In einem zweiten Schritt wird anhand des Messprotokolls eine Vermutung aufgestellt, die anschliessend bewiesen wird. Es ist nicht angebracht, diese beiden Varianten, die nur zwei von vielen sind, gegeneinander auszuspielen. Vielmehr sind ihre Eigenheiten festzuhalten. Bei der ersten läuft Vermuten und Beweisen oft parallel, bei der zweiten ist die Vermutung vor dem Beweis. In Beispielen vorgefundene Sachverhalte in mathematische Vermutungen umzumünzen, fördert die Fähigkeit zu Verallgemeinern. Muster in einem Messprotokoll herauszulesen, dient der Entwicklung der Strukturerkennung.

Kein Weg führt an Exaktheit und Vollständigkeit vorbei: Die erfolgreiche Mathematikerin zeichnet sich nebst Intuition durch Genauigkeit aus. Diese äussert sich in der Präzision und Vollständigkeit der Argumente, im schrittweisen Folgern. Das Schlussresultat ist der sprachlich gefasste Beweis. Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die als Beweis eine lückenlose, deduktive Argumentationskette verlangt – auch wenn, wie oben angetönt, das mathematische Arbeiten oftmals induktiv ist. Die Algebra bietet ein gutes Übungsfeld, sich Exaktheit und schrittweises Argumentieren anzueignen. Nicht, weil ein mathematischer Beweis in der Berechnungstheorie schlussendlich nichts anderes als ein (unter Umständen sehr komplizierter) algebraischer Term ist, sondern, weil bei der Algebra das korrekte und schrittweise Anwenden von Regeln und, z.B. bei der Termumformung oder beim Gleichungslösen, das strategische, zielbewusste Anwenden von Regeln, also Heuristik im Miniformat, gelernt werden kann. Zudem ist der Abstraktionsgedanke hinter der Algebra das Fundament der ganzen Mathematik. Ein CAS soll hier nur unterstützend eingesetzt werden, auf keinen Fall ersetzend. Die von Hand ausgeführten algebraischen Schritte garantieren ein engmaschiges Argumentationsnetz. Werden diese Schritte durch das CAS ersetzt, wird das Argumentationsnetz grossmaschiger. Eine ähnliche Situation findet sich im Vergleich von Physik und Chemie: die Physik wirft einen feinmaschigen Blick auf die Chemie, deren Argumente grossmaschiger, näher bei Faustregeln sind. In diesem Zusammenhang sei nochmals an die oben angeschnittene Diskussion von reiner und angewandter Mathematik erinnert. Ein CAS-Taschenrechner ermöglicht die Behandlung relevanter und komplexer Anwendungsbeispiele. Durch den Einsatz des Rechners werden die Maschen des Argumentationsnetzes grösser, denn es werden andere Fragen gestellt, wie z.B. das Interpretieren von Resultaten oder das Modellieren von Daten. Solche Fragestellungen verlangen typischerweise keinen lückenlosen, deduktiven Argumentationsstrang.

Philosophien

Die Frage, was Mathematik sein kann, ist nicht neu und liegt der Philosophie der Mathematik zu Grunde. Es soll ein Blick in die Schatulle einiger dieser Philosophien geworfen werden, wobei der historische Weg beschritten wird. Vielleicht lässt sich aus den verschiedenen Konzeptionen von Mathematik und Lernen Brauchbares für die Rolle des CAS beim Mathematiklernen herausfiltern. (Ein brauchbarer Einstieg in die Philosophie der Mathematik liefert z.B. [3], etwas anspruchsvoller wäre z.B. die Anthologie [4]).

Platon. Mathematik als Ewiges und Wahres: Für Platon sind mathematische Ideen und Objekte ewig, unabhängig von allem und geben der materiellen Welt die Struktur. Mathematik Lernen ist bei Platon ein Wiedererinnerungsprozess unserer Seele, die selber Teil der Ideenwelt ist und bei unserer Geburt einen Gedächtnisverlust erlitten hat. Eine mathematische Aussage haben wir gemäss Platon verstanden, wenn sich unsere Seele vollständig daran erinnert. Welche Rolle spielt das CAS in einer solchen Konzeption von

Mathematiklernen? – Wir können nur mutmassen: Wiedererinnern im Sinne von Platon ist ein Wachsein, ist eine konzentrierte Hingabe, ist ein Empfangen-Können und ginge deshalb einem sinnvollen CAS-Einsatz eher voraus, als dass ein CAS die Voraussetzung für ein vollständiges Wiedererinnern-Können wäre.

Aristoteles. Mathematik als Abstraktion der realen Welt: Bei Aristoteles hängt die materielle Welt nicht von den mathematischen Ideen ab, sondern die mathematischen Ideen sind abhängig von der materiellen Welt, sie sind Abstraktionen davon. Für Aristoteles hat Mathematiklernen viel zu tun mit Strukturen Erkennen, Systematisieren, Ordnen und die in der Welt innewohnenden Muster aufdecken. Mit anderen Worten: wenn ein CAS die Fähigkeit der Strukturerkennung zu fördern vermag, kann es das Mathematiklernen nach Aristoteles unterstützen. (Die Frage ist nicht, wie erzeugt ein CAS *Situationen*, in denen Strukturen erkannt werden können, sondern, ob ein CAS die *Fähigkeit*, Strukturen zu erkennen, fördert.)

Frege. Mathematik als logische Struktur unseres Denkens: Nach Frege ist Mathematik die logische Struktur, die unserem Denken unterliegt. Diese Struktur ist unserem Denken gegeben; wir können nicht anders, als in *diesen* Strukturen zu denken. Mathematische Aussagen sind gemäss Frege herleitbare Aussagen in einem formalen System. Mathematiklernen heisst bei Frege, sich in einem formalen System zurecht zu finden, gemäss den Regeln dieses formalen Systems argumentieren zu lernen. Lässt sich hier ein Zusammenhang zwischen CAS und Mathematiklernen finden? – Einmal mehr ist dies ein Fischen im Trüben, denn in den Schriften von Frege lässt sich natürlich keine Antwort finden. Zwei komplementäre Spekulationen als Vorschlag: Besteht Mathematik im *Herleiten* von Aussagen im formalen Systems, drängt sich ein CAS nicht auf, denn es geht dann gerade um das Erlernen des Herleitungskalküls. Besteht Mathematik im *Aufstellen* eines formalen Systems, dann kann ein CAS (z.B. beim Testen) durchaus hilfreich sein.

Brouwer. Mathematik als Entwicklung unserer Grundintuition: Bei Brouwer ist der menschliche Intellekt der Wohnort von mathematischen Ideen und Objekten. Mathematiklernen besteht bei Brouwer in der Erweiterung und Entwicklung unserer mathematischen Grunderfahrung des Zählens, die zu unserer Grundintuition Anlass gibt. Für Brouwer haben wir eine mathematische Aussage verstanden, wenn wir sie intuitiv erfasst haben. Das heisst bei ihm, wenn wir für die Aussage denselben Grad von Intuition wie für das Zählen haben, wenn wir den entsprechenden Sachverhalt mehr im Körper und weniger im Kopf haben, wenn wir einen sprachlosen Zugang zu ihr gewonnen haben, wenn wir sie als Handlungsanweisung erfahren haben, wenn wir wissen, etwas Neues zu machen – und nicht einfach etwas Neues wissen. Eine unterstützende Funktion eines CAS beim Mathematiklernen ist in solch einem Kontext nicht offensichtlich. Denn für Brouwer sind logische Regeln zunächst nur sprachliche Anweisungen, die nicht automatisch das intuitive Erfassen von mathematischen Aussagen mit sich bringen.

Sichtung von Konturen: Lässt sich aus diesen vier verschiedenen Konzeptionen von Mathematik und Mathematiklernen ein Kern herauschälen? – Sachte nur, doch erkennbar, zeichnen sich unter der Decke zwei Konturen des Mathematiklernens ab. Die erste betont das Arbeiten mit und in Strukturen, sie ist bei Aristoteles und Frege herauszulesen. Die zweite hat viel mit Verkörper(lich)ung und Verinnerlichung von mathematischen Ideen zu tun, sie ist bei Platon und Brouwer zu finden. Und irgendwie hat man das Gefühl, der Platz des CAS sei beim Mathematiklernen eher bei der ersten Kontur als bei der zweiten anzusiedeln. Denn bei der zweiten ist ein persönlicher, nichtsprachlicher, körperlicher Zugang zur Mathematik zu suchen und zu finden, fast ein intimer, emotionaler Prozess, bei dem ein CAS irgendwie artfremd wäre.

Frühlingserwachen

Weder ein Rezept noch ein Gesetzesbuch kann das Ziel einer Diskussion über die Rolle des CAS beim Mathematiklernen sein. Doch kann eine solche Auseinandersetzung klar machen, dass wir beim Thema CAS nicht auf objektives Wissen zurück greifen können und uns dadurch der Verantwortung der Wahl nicht entziehen können. Die Aufgabe ist daher ein Freilegen und Ausgraben, ein Aufzeigen von Zusammenhängen, von Verbindungen und Implikationen. Nur so ist und wird ein bewusster Umgang mit dem CAS möglich. Vieles ist hier nur angetönt und skizziert worden. Geliefert wurde ein Filet à point. Es soll die Leserschaft animieren, weiter Holz ins Feuer zu legen.

Literatur

- [1] TI-Bulletin.
- [2] CAS als Messapparat
- [3] A. GEORGE AND D.J. VELLEMAN *Philosophies of Mathematics*, Blackwell Publishers, 2002.
- [4] *Philosophy of Mathematics: an Anthology* editiert von Dale Jacquette, Blackwell Publishers, 2002.

CAS Diskussionsforum

Mittlerweile ist CAS (Computer Algebra System) an den Gymnasien kein Fremdwort mehr. Schon wird an Maturitätsprüfungen ein CAS-Taschenrechner eingesetzt – oder erlaubt, je nach Glaubensbekenntnis. Die Handlichkeit der Handys führt zur ständigen Erreichbarkeit – die Handlichkeit der Rechner zur Omnipräsenz des CAS. Das Gymnasium hat nicht nach dem CAS gerufen, das CAS hat nicht an unsere Türe geklopft, es war einfach da, ist nun da und bleibt (vielleicht) da. So haben wir uns mit diesem Kuckucksei auseinander zu setzen. Unterdessen ist die erste Schockwelle vorüber und es bietet sich die Gelegenheit, an diesem Kuckucksei zu schnuppern, zu klopfen, es aus Distanz zu betrachten, an ihm das Stethoskop anzusetzen und seinen Puls abzuhören.

Die DMK hat sich entschlossen an Hochschulen nachzufragen, welche CAS Hilfsmittel an (Vor-)Diplomprüfungen zugelassen sind und werden. Dabei zieht die DMK nicht nur die Mathematikinstitute mit ein, sondern vor allem auch Ingenieur- und Naturwissenschaften. Weiter soll dem Thema CAS am Kongress S2-2005 Platz eingeräumt werden und schliesslich soll hier, im Bulletin, eine Diskussionsecke zum Thema CAS lanciert werden. Liebe Leserin, lieber Leser, sie sind eingeladen und um Hilfe gebeten. Lassen Sie uns zukommen, was immer über CAS Ihnen in den Kopf kommt. Das können Kürzestgeschichten sein, spontane Einfälle, Notizen, Unterlagen, Hasstiraden, Loblieder, Zusammenfassungen, Essays, Abhandlungen, Reflexionen, Artikel, Leserbriefe, Skizzen, einfach alles, das Ihnen als Diskussionsbeitrag geeignet scheint. Die DMK ist interessiert an Ihrer Meinung, an Ihren Erfahrungen, an Ihren Gedanken, an Ihren Gefühlen, an Ihren Vorschlägen, an Ihren Einsichten, schlicht an allem, was Sie im Zusammenhang mit dem Thema CAS bewegt und angeht. So versteht sich die DMK als Sammlerin, die Ihre Beiträge gerne entgegen nimmt und demnächst und bis auf Weiteres an dieser Stelle veröffentlichen will.

Mit bestem Dank, Christian Rüede (DMK).

Reichen Sie ihre Beiträge ein an