Taxi-distance

Alain Stucki, Lycée cantonal de Porrentruy

I. Introduction

La fiche numéro 10 du fascicule romand "Mathématiques 3^e" propose le problème suivant dont nous avons ajouté la solution.

Dans ce quadrillage (Fig. 1), on se déplace en suivant les lignes. Place un point sur tous les croisements qui se trouvent à la même distance du carré et du triangle.

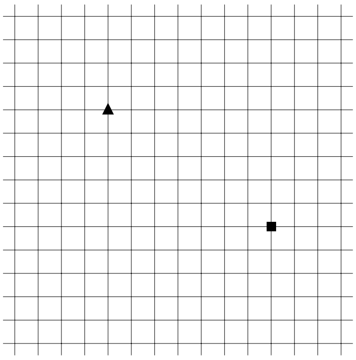
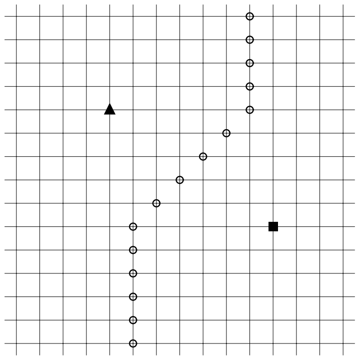


Fig. 1



Solution

Un tel quadrillage n'est pas sans rappeler les grandes avenues perpendiculaires de New-York sur lesquelles défilent les célèbres taxis jaunes. Si le carré et le triangle symbolisent deux taxis, les croisements mis en évidences sont bien les points à la même *taxi-distance*.

Ce problème que mon fils Paul a dû résoudre m'a suggéré de revisiter quelques lieux géométriques, en particulier les coniques, et ceci ... en taxi !

II. Distance sur $\boldsymbol{R}^2$

Soit $\boldsymbol{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et soit les points $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$.

Une fonction $d : \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^2 \longrightarrow \boldsymbol{R}_+$ est appelée *distance* si, $\forall\, A, B, C \in \boldsymbol{R}^2$, elle vérifie les propriétés suivantes

1) $d(A, A) = 0$
2) $d(A, B) = d(B, A)$
3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Le couple $(\boldsymbol{R}^2, d)$ est appelé *espace métrique.*

Dans $(\boldsymbol{R}^2, d)$, on appelle *distance d'un point* $A \in \boldsymbol{R}^2$ *à une partie* $\Delta \subset \boldsymbol{R}^2$, et on note $d(A, \Delta)$, le nombre

$$d(A, \Delta) = \inf \{ d(A, X) \mid X \in \Delta \}.$$

III. Distance euclidienne et taxi-distance sur $\boldsymbol{R}^2$

La *distance euclidienne* est définie par

$$d_e(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\ .$$

La *taxi-distance* est définie par

$$d_t(A, B) = | b_1 - a_1 | + | b_2 - a_2 |\ .$$

IV. Lieux géométriques

1) Dans $(\boldsymbol{R}^2, d)$, on appelle ***médiatrice*** *du segment* $[A\,B]$ l'ensemble des points $M \in \boldsymbol{R}^2$ qui vérifient

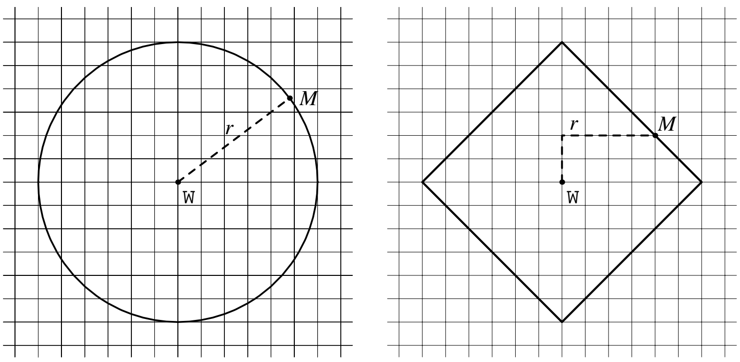
$$d(M, A) = d(M, B).$$

Les points de la solution ci-dessus appartiennent à la médiatrice du segment [*triangle, carré*].

2) Dans $(\boldsymbol{R}^2, d)$, on appelle ***cercle*** *de centre* $\Omega \in \boldsymbol{R}^2$ *et de rayon* $r \in \boldsymbol{R}_+^*$ l'ensemble des points $M \in \boldsymbol{R}^2$ qui vérifient

$$d(M, \Omega) = r.$$

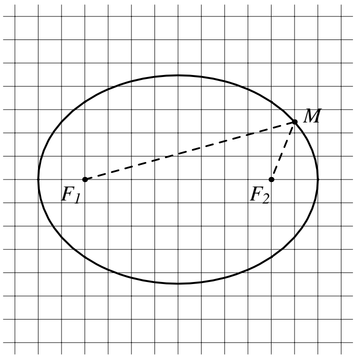
Représentation des cercles C_e et C_t de centre Ω et de rayon $r = 6$.

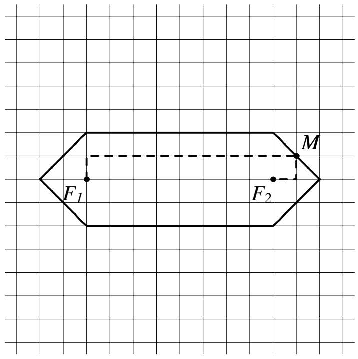


3) Dans $(\boldsymbol{R}^2, d)$, on appelle ***ellipse*** *de foyers* $F_1, F_2 \in \boldsymbol{R}^2$ *associée au nombre* $2a \in \boldsymbol{R}_+^*$, *avec* $2a > d(F_1, F_2)$, l'ensemble des points $M \in \boldsymbol{R}^2$ qui vérifient

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a.$$

Représentation des ellipses E_e et E_t de foyers F_1 et F_2, associées au nombre $2a = 12$.

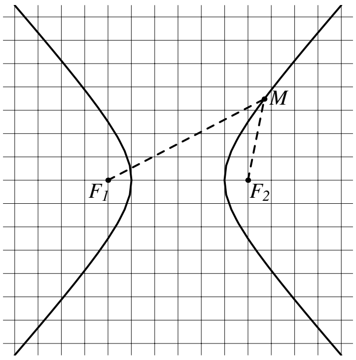


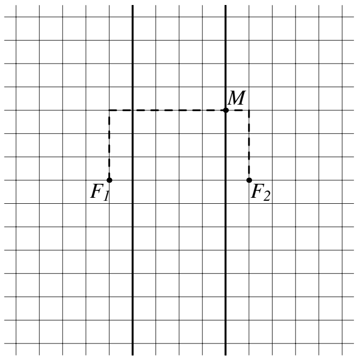


4) Dans ($\boldsymbol{R}^2$, d), on appelle ***hyperbole*** *de foyers* F_1, $F_2 \in \boldsymbol{R}^2$ *associée au nombre* $2a \in \boldsymbol{R}_+^*$, *avec* $2a < d(F_1, F_2)$, l'ensemble des points $M \in \boldsymbol{R}^2$ qui vérifient

$$| d(M, F_1) - d(M, F_2) | = 2a.$$

Représentation des hyperboles H_e et H_t de foyers F_1 et F_2, associées au nombre $2a = 4$.

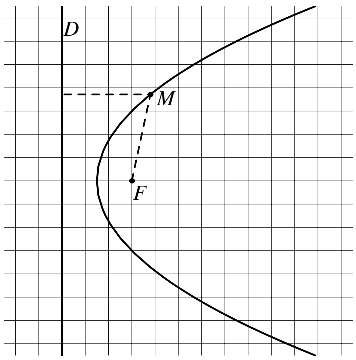


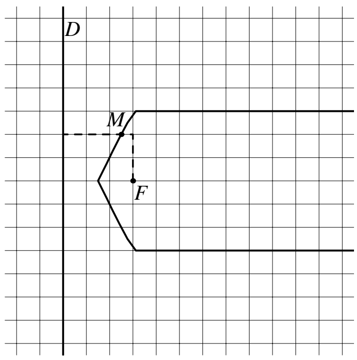


5) Dans ($\boldsymbol{R}^2$, d), on appelle ***parabole*** *de foyer* $F \in \boldsymbol{R}^2$ et *de directrice la droite* D l'ensemble des points $M \in \boldsymbol{R}^2$ qui vérifient

$$d(M, F) = d(M, D).$$

Représentation des paraboles P_e et P_t de foyer F et de directrice D.





V. Dans nos classes

La représentation de sous-ensembles de $\boldsymbol{R}^2$ en tant que lieux géométriques est intéressante car elle ne fait pas appel aux équations parfois abstraites pour nos élèves. Sur un quadrillage, les mesures de distance se font facilement, même (en fait surtout) en taxi!

Pour poursuivre les expériences, il est possible d'utiliser *Mathematica®* qui permet de représenter des ensembles définis implicitement, ce qui nous donne la possibilité de visualiser l'effet de l'utilisation d'une nouvelle distance dans une condition qui ne varie pas. Nous donnons ci-dessous quelques indications pour mettre en oeuvre un petit atelier.

Le package permettant d'introduire des fonctions implicites est le suivant

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"];
```

Si on considère deux points $A(a_1, a_2)$ et $B(b_1, b_2)$, les distances étudiées ci-dessus peuvent être définies comme suit

```
disteuclide[{a1_, a2_}, {b1_, b2_}] := √((b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2);
taxidist[{a1_, a2_}, {b1_, b2_}] := Abs[b1 - a1] + Abs[b2 - a2];
```

Finalement, voici un exemple de commandes de base permettant la représentation des ellipses de foyers $F_1(-4, 0)$ et $F_2(4, 0)$, avec $2\,a = 12$.

```
F1 = {-4, 0};  F2 = {4, 0};
deuxa = 12;
M = {x, y};


ellipseeuclide =
 ImplicitPlot[disteuclide[M, F1] + disteuclide[M, F2] == deuxa,
  {x, -6, 6}, {y, -5, 5}];


ellipsetaxi =
 ImplicitPlot[taxidist[M, F1] + taxidist[M, F2] == deuxa,
  {x, -6, 6}, {y, -3, 3}];
```

VI. Jouons les prolongations

Après ces quelques essais, je vous propose de tester la distance ci-dessous

$$d_m(A, B) = \max\{|\, b_1 - a_1\,|,\ |\, b_2 - a_2\,|\}.$$