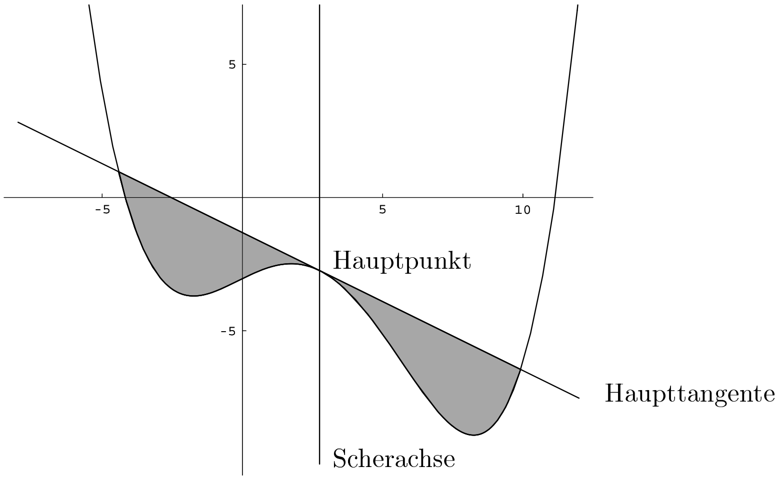
Peter Gallin

Die versteckte Symmetrie eines allgemeinen Graphen 4. Grades



Dass der Graph einer ganzrationalen Funktion 2. Grades mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ eine bezüglich der Geraden $x_s = -\frac{b}{2a}$ symmetrische Parabel ist, muss hier nicht bewiesen werden. Ebenfalls weit herum bekannt ist, dass der Wendepunkt Symmetriezentrum des Graphen einer ganzrationalen Funktion 3. Grades mit der Gleichung $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist. Die x-Koordinate x_s des Wendepunktes erhält man durch Nullsetzen der zweiten Ableitung $y'' = 6ax + 2b$ und zwar als $x_s = -\frac{b}{3a}$. Von einer Symmetrie des Graphen einer ganzrationalen Funktion 4. Grades mit der Gleichung $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$ hört man dagegen wenig. Das holen wir hier nach.

Die zweite Ableitung $y'' = 12ax^2 + 6bx + 2c = 2(6ax^2 + 3bx + c)$ der Funktion 4. Grades hat eine bezüglich $x_s = -\frac{b}{4a}$ symmetrische Parabel als Graph. Wendepunkte der Funktion 4. Grades existieren, falls die Diskriminante $9b^2 - 24ac$ des quadratischen Terms positiv ist, das heisst wenn $3b^2 > 8ac$. In diesem Fall liegen sie symmetrisch bezüglich der Geraden mit der Gleichung $x_s = -\frac{b}{4a}$. Der Punkt mit dieser x-Koordinate könnte also mit Fug und Recht „Hauptpunkt“ des Graphen genannt werden. Wie man das auch bei der Kurve 3. Grades macht, verschieben wir nun den Graph der Funktion $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um $\frac{b}{4a}$ horizontal, das heisst, wir ersetzen x durch $(x - \frac{b}{4a})$. Der Hauptpunkt der verschobenen Kurve liegt damit auf der y-Achse und die Gleichung lautet

$$\overline{y} = a(x - \frac{b}{4a})^4 + b(x - \frac{b}{4a})^3 + c(x - \frac{b}{4a})^2 + d(x - \frac{b}{4a}) + e \ ,$$

die wir nach Potenzen von x ordnen und dabei festellen, dass x^3 nicht mehr vorkommt:

$$\overline{y} = ax^4 + (c - \frac{3b^2}{8a})x^2 + (d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2})x + e - \frac{bd}{4a} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{3b^4}{256a^3}$$

Kürzen wir die Koeffizienten der Gleichung dieser verschobenen Kurve ab und schreiben für sie $\overline{y} = ax^4 + px^2 + mx + q$, so erkennen wir, dass sie die um q vertikal verschobene Überlagerung von $y_1 = ax^4 + px^2$ und $y_2 = mx$ ist. Das bedeutet also, dass der bezüglich der y-Achse symmetrische Graph von $y_1 = ax^4 + px^2$ einer Scherung mit der y-Achse als Scherachse und m als Scherbewegung im Abstand 1 von der Scherachse unterworfen wird. Mit der Gleichung $y_3 = mx + q$ ist somit die Tangente im Hauptpunkt — die „Haupttangente“ — des verschobenen Graphen gegeben. Die Haupttangente des ursprünglichen Graphen hat also die Gleichung $y_t = m(x + \frac{b}{4a}) + q$. Fassen wir zusammen:

Der Graph einer allgemeinen ganzrationalen Funktion 4. Grades $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ist das bezüglich der Achse $x_s = -\frac{b}{4a}$ **gescherte Bild** einer zu $y_1 = ax^4 + (c - \frac{3b^2}{8a})x^2$ kongruenten Kurve. Die Haupttangente im Punkt mit der x-Koordinaten $x_s = -\frac{b}{4a}$ hat die Gleichung $y_t = (d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2})(x + \frac{b}{4a}) + e - \frac{bd}{4a} + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{3b^4}{256a^3} = (d - \frac{bc}{2a} + \frac{b^3}{8a^2})x + e - \frac{b^2c}{16a^2} + \frac{5b^4}{256a^3}$. Scherachse und Haupttangente bilden ein schiefwinkliges System, bezüglich dessen die Kurve symmetrisch ist.

19. Juni 2004