

DPK

Newton'sche Lichtablenkung

Otto M. Keiser
 Hochstrasse 44, CH-8044 Zürich
 omkeiser@smile.ch

Einstein oder Newton ?

Am 1. Vortrag des Einstein Kolloquiums in Bern hat Prof. G. Grasshoff in seinem Vortrag „Einstein und die Finsternis“ über jenes entscheidende Experiment berichtet, das Eddington 1919 während einer Sonnenfinsternis in Rhodesien durchführte. Es ging darum, Einsteins Voraussage zu verifizieren, dass Licht aufgrund der ART durch Massen abgelenkt wird. Den experimentellen Nachweis hat Eddington wie folgt erbracht: Bei vollständig verfinsteter Sonne konnte er einen Stern beobachten, von dem er wusste, dass er von seinem Standort aus gesehen hinter der Sonne stand. Das war eben nur möglich, wenn der vom Stern ausgehende Lichtstrahl „um die Sonne herum“ ins Auge des Experimentators „gebogen“ wurde (siehe Fig.).

Prof. Grasshoff hat in seinem Vortrag aber dargelegt, dass es 1919 eigentlich um mehr ging, nämlich zu entscheiden zwischen Newton und Einstein, insofern als schon Newton eine solche Ablenkung nicht nur behauptete, sondern auch berechnete. Er kam auf einen Wert, der exakt halb so gross war wie der von Einstein erwartete. Durch eine grosszügige Auslegung der Messergebnisse konnte Eddington zugunsten von Einstein entscheiden.

Im Anschluss an den Vortrag stellte ich mir die Frage, ob wohl Newtons Berechnungen in Reichweite eines Gymnasiasten, z. B. im Rahmen des Faches P&AM liegen. Das scheint mir nicht ausgeschlossen. Aus der Mathematik benötigt er die üblichen Kenntnisse aus der Vektorgeometrie (inkl. Kegelschnitte) und der Analysis. Aus der Physik muss er den Energieerhaltungssatz und den Drehimpulserhaltungssatz oder alternativ dazu die gleichförmige Kreisbewegung mitbringen und natürlich wissen (m. E. nicht verstehen), dass das Zweikörperproblem drei verschiedene Lösungen haben kann.

Newtons Überlegungen

Obwohl ich die Berechnungen von Newton im Detail nicht kenne, wage ich seine Überlegungen zu skizzieren:

- Der Vergleich der Lichtreflexion mit dem elastischen Stoss von Kugeln an der Wand legt nahe, Licht wie Korpuskeln (mit unbestimmter Masse) zu behandeln.
- Die Lichtkorpuskeln starten beim fraglichen Experiment in einem „unendlich fernen“ Stern mit einer endlichen Geschwindigkeit c (vermutlich kannte Newton den von O. Römer berechneten Wert $c \rightarrow 2 \cdot 10^8$ m/s).
- Wenn es darum geht, die Bahn dieses Lichtkorpuskels unter dem alleinigen Einfluss der Sonne zu beschreiben, so handelt es sich um ein Zweikörperproblem mit der Hyperbel als Lösung.
- Unter dem Ablenkungswinkel versteht man dann den Schnittwinkel der Hyperbelasymptoten.

Auf diese Prämissen stützen sich die nachfolgenden Berechnungen. Sie sind nur so ausführlich aufgeschrieben, wie es bei Verwendung eines Taschencomputers mit CAS (=Computer Algebra System) nötig ist.

Berechnungen im Überblick

Die Hyperbelbahn hat die Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$$

Gesucht sind die Hyperbelachsen A und B, woraus sich dann wegen

$$\tan \alpha \Rightarrow \frac{A}{B}$$

schliesslich der Ablenkwinkel als Schnittwinkel 2α der Hyperbelasymptoten ergibt.

Für die lineare Exzentrizität C gilt einerseits aus geometrischen Gründen

$$C^2 = A^2 + B^2,$$

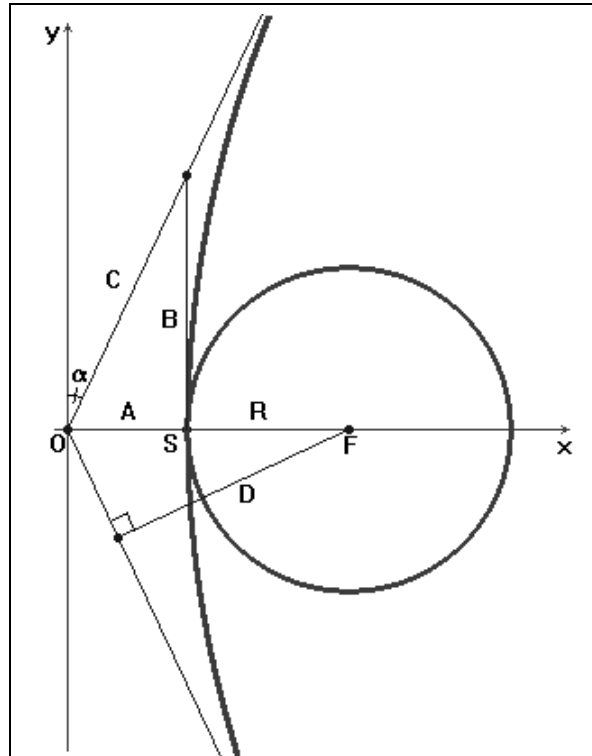
andererseits weil ein Hyperbelbrennpunkt im Sonnenzentrum liegt

$$C = A + R$$

Wenn man die zweite Gleichung in die erste einsetzt, erhält man eine Gleichung, in welcher A nur noch linear vorkommt. Mit einem CAS ergibt sich:

$$A = \frac{B^2 - R^2}{2R},$$

d.h. es ist nur noch B zu bestimmen.



Berechnung von B mittels Energie- und Drehimpulserhaltungssatz

Wenn man die potentielle Energie auf der Sonnenoberfläche 0 setzt, ferner annimmt, das Lichtkorpuskel mit der Masse m habe im Unendlichen Lichtgeschwindigkeit c, so hat es dort die Energie

$$W_{\infty} = \frac{GmM}{R} + \frac{mc^2}{2}$$

(G = Gravitationskonstante, M = Sonnenmasse, m = Korpuskelmasse, R = Sonnenradius).

Wenn die Geschwindigkeit des Korpuskels im Hyperbelscheitel S mit c' bezeichnet wird, hat es dort die Energie:

$$W_S = \frac{mc'^2}{2}.$$

Mit dem Energieerhaltungssatz $W_{\infty} = W_S$ ergibt sich :

$$c'^2 = c^2 + \frac{2GM}{R}$$

Die Geschwindigkeit c' des Lichtkorpuskels ist in S also (wenig) grösser als c, d.h. die vorliegende Berechnung verletzt ein fundamentales Postulat der Relativitätstheorie.

Der Drehimpuls des Lichtkorpuskels bez. F beträgt in S:

$$L_S = Rmc'$$

Im Unendlichen hat es den Drehimpuls

$$L_{\infty} = Dmc,$$

wobei D für den Abstand des Punktes F von den Hyperbelasymptoten steht. Wegen $C = A + R$ sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke in der Figur kongruent und es gilt:

$$D = B$$

Der Drehimpulserhaltungssatz

$$L_S = L_{\rightarrow}$$

liefert nun:

$$B = \frac{\sqrt{c^2 R^2 + 2GMR}}{c},$$

und hieraus:

$$A = \frac{GM}{c^2}$$

In unserem Beispiel ($M = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 6.96 \cdot 10^8$ m, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg², $c = 3.00 \cdot 10^8$ m/s) ist \rightarrow ein ganz kleiner Winkel, und deshalb gilt:

$$\rightarrow \tan \rightarrow = \frac{A}{B} = \frac{GM}{c \sqrt{c^2 R^2 + 2GMR}}$$

Berücksichtigt man schliesslich noch, dass für obige Werte $2GMR \ll c^2 R^2$, erhält man für den Ablenkungswinkel $2 \rightarrow$ die berühmte Formel

$$2 \rightarrow \rightarrow \frac{2GM}{c^2 R}$$

Numerisch ergibt sich:

$$2 \rightarrow \rightarrow 0.00000423 \text{ (Bogenmass)}$$

$$2 \rightarrow \rightarrow 0.874 \rightarrow \text{(Gradmass)}$$

Für die „Vorstellung“ ist es vielleicht noch interessant, die numerischen Werte von A und c' zu erfahren:

$$A = 1470 \text{ m} \quad c' = 3.00001 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Alternative Berechnung von B (ohne Drehimpuls)

Idee: Man approximiert die Bewegung des Lichtkorpuskels in S durch eine gleichförmige Bewegung (Geschwindigkeit c') auf dem Krümmungskreis der Hyperbel.

Löst man mit einem CAS die Hyperbelgleichung $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ unter Berücksichtigung der Formel

$A = \frac{B^2 - R^2}{2R}$ nach x auf, so erkennt man, dass die Hyperbel der Graph der folgenden Funktion $x = f(y)$ ist:

$$f: y \rightarrow x = \frac{(B^2 - R^2) \sqrt{y^2 + B^2}}{2BR}$$

Weil $f'(0) = 0$, hat der Krümmungskreis in S den Radius $r = \frac{1}{f''(0)}$. Mit dem CAS erhält man so:

$$r = \frac{2B^2 R}{B^2 - R^2}$$

Die Zentripetalkraft $F_Z = \frac{mc'^2}{r}$ wird durch die Gewichtskraft $F_S = \frac{GmM}{R^2}$ in S aufgebracht. Löst man die Gleichung

$$F_Z = F_S$$

mit dem CAS nach B auf, wird die obige Formel bestätigt, so dass der Ablenkungswinkel $2 \rightarrow$ wie bereits besprochen- ausgerechnet werden kann.

Ich danke Niklaus Sigrist für entscheidende Anregungen und die Durchsicht des Manuskripts.