Projektionen

Dr. H.U. Keller, KZO Wetzikon

Abstract: In diesem Beitrag soll gezeigt werden, dass jede nichttriviale Projektionsmatrix sowohl singulär als auch symmetrisch ist. Die Ueberlegungen werden für den zwei- und dreidimensionalen Fall schülergerecht und detailliert, hingegen für den höherdimensionalen Fall etwas allgemeiner und abstrakter dargestellt.

1. Einleitung

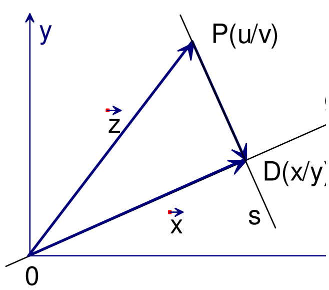
Unter Projektionen werden Abbildungen $\vec{z} \mapsto \vec{x}$ von Elementen $\vec{z}$ eines n-dimensionalen Vektorraums V, den wir uns als direkte Summe $M \oplus N$ zweier k- respektive (n–k)-dimensionaler Unterräume M und N vorstellen, auf diesen k-dimensionalen Untervektorraum $M \subset V$ entlang des Unterraumes N verstanden, bei denen das innere Produkt $((\vec{x} - \vec{z}), \vec{x}) = 0$ ist.
Unter Projektionen in diesem Sinne sind damit also ausschliesslich Normalprojektionen gemeint. Die Spezialfälle der Identitätsabbildung und der Nullabbildung werden hier nicht als Projektionen betrachtet. Es wird weiter angenommen, dass wie üblich ein orthonormiertes Basisvektorensystem gegeben sei.

Dank der Isomorphie zwischen der Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^n$ und der Menge aller zugehörigen Ortsvektoren darf – je nach Bedarf – jeder Punkt mit seinem zugehörigen Ortsvektor identifiziert werden. In analoger Weise darf eine lineare Abbildung mit ihrer bezüglich des gegebenen Systems von Basisvektoren zugehörigen Matrix identifiziert werden.

Der zwei- und dreidimensionale Fall eignet sich für die Behandlung im Mathematik-Unterricht im mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil von Gymnasien. Der n-dimensionale Fall (mit n > 3) dient dem Ausblick auf allgemeine Eigenschaften solcher Abbildungen. Speziell interessant ist dabei der Fall k = n–1, was dem üblichen und anschaulichen Begriff einer Normalprojektion entspricht, beispielsweise also der Abbildung eines im dreidimensionalen Raum gegebenen Punkts auf seinen Grundriss.

2. Zweidimensionaler Fall

Am einfachsten lässt sich dieser Sachverhalt zunächst einmal für den zweidimensionalen Fall, also für n = 2, an Hand der folgenden Figur 1 darstellen und verstehen:



Figur 1: Projektion im zweidimensionalen Fall

Der Vektor $\vec{z} = \overrightarrow{OP}$ der x-y-Ebene (= V) wird so entlang der Geraden s (= N) auf die Gerade g (= M) projiziert, dass der Vektor $(\vec{x} - \vec{z})$ senkrecht auf dem Bildvektor $\vec{x} = \overrightarrow{OD}$ steht.

Algebraisch lässt sich diese Projektion mit Hilfe einer (2 x 2) - Projektionsmatrix A darstellen. Um A zu finden, schneiden wir zunächst die Gerade g, die durch den Ursprung geht und die Steigung a habe, mit einer zu ihr senkrechten Geraden s durch den Punkt P(u/v). Aus dem System

$$\left| \begin{aligned} y &= ax \\ (-\frac{1}{a}) &= \frac{y-v}{y-u} \end{aligned} \right|$$

ergeben sich die Koordinaten des Durchstosspunktes D(x/y):

$$\left| \begin{aligned} x &= \frac{1}{1+a^2}u + \frac{a}{1+a^2}v \\ y &= \frac{a}{1+a^2}u + \frac{a^2}{1+a^2}v \end{aligned} \right|$$

In Matrix-Schreibweise lässt sich dafür schreiben: $A\vec{z} = \vec{x}$, respektive ausgeschrieben:

$$\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Matrix $A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ hat mindestens drei bemerkenswerte Eigenschaften:

- A ist gleich ihrer eigenen transponierten Matrix A^T ist: $A = A^T$. Die Projektionsmatrix A ist also symmetrisch bezüglich ihrer Hausptdiagonalen.

- Ihr Quadrat ist gleich der Matrix selber: $A^2 = A$.

- A ist singulär ist, da ihre Determinante det(A) = 0 ist.

Die Projektionsmatrix A kann also nicht invertiert werden. Dies steht in Uebereinstimmung mit der Tatsache, dass aus einem Bild D(x/y) nicht auf das Urbild P(u/v) geschlossen werden kann, da die Normal-Projektion keine injektive Abbildung ist.

Die in gewisser Weise dazu duale Abbildung besteht darin, dass jeder Punkt P entlang der Geraden g auf eine zu ihr senkrecht stehende Ursprungsgerade abgebildet wird. Zu dieser Abbildung gehört die Matrix I–A, in diesem Fall also

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} a^2 & a \\ a & 1 \end{pmatrix},$$

die auch wieder eine Projektionsmatrix ist. Auf diesen Zusammenhang wird im fünften Abschnitt noch näher eingegangen.

3. Dreidimensionaler Fall

Die oben dargelegte Vorgehensweise lässt sich leicht auf drei Dimensionen (n = 3) erweitern. Der allgemeine Punkt P(u/v/w) soll durch eine Normalprojektion auf die Ebene E: ax + by + cz = 0 abgebildet werden. Dazu kann der Durchstosspunkt D(x/y/z) einer Geraden s, die senkrecht auf E steht und durch den gegebenen Punkt P(u/v/w) geht, durch diese Ebene E berechnet werden, was mit dem folgenden Gleichungssystem möglich ist:

$$\left| \begin{array}{c} x = u + t \cdot a \\ y = v + t \cdot b \\ z = w + t \cdot c \\ ax + by + cz = 0 \end{array} \right|$$

Die Koordinaten von D(x/y/z) ergeben sich wie im zweidimensionalen Fall aus der Matrix-Gleichung $A\vec{z} = \vec{x}$, hier mit der (3 x 3) - Matrix

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2 + a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Auch hier ist die Projektionsmatrix A symmetrisch, sie ist also gleich ihrer transponierten Matrix A^T; sie ist ebenfalls gleich ihrem eigenen Quadrat, und A ist auch im dreidimensionalen Fall – aus den gleichen Gründen wie beim zweidimensionalen Fall – singulär und damit nicht invertierbar, wie sich z.B. durch Berechnung ihrer Determinanten leicht nachweisen lässt.

Interessant ist hier die dazu duale Projektion – statt 'entlang der Geraden g auf die Ebene E' 'entlang der Ebene E auf die Gerade g'. Darunter ist anschaulich die Abbildung zu verstehen, mit der jeder Punkt P des Raumes auf den Schnittpunkt der Geraden g mit einer zu E parallelen Ebene durch P abgebildet wird. Die zugehörige Matrix ist wiederum gleich I–A, in diesem Fall also

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

Auch diese Matrix weist die gleichen Eigenschaften wie A selber auf, was leicht durch direktes Nachrechnen verifiziert werden kann.

4. Eindimensionaler Fall

Der Fall mit n = 1 ist zwar trivial, soll hier aber der Vollständigkeit halber dennoch kurz erwähnt werden. Ein eindimensionaler Vektorraum lässt sich durch eine Gerade, auf welcher ein Punkt O als Ursprung und eine Einheit festgelegt worden ist, visualisieren, also durch die bekannte Zahlengerade. Ein eindimensionale Vektor hat nur eine einzige Komponente und ist damit eigentlich ein Skalar. Die Matrix-Multiplikation $A\vec{z} = \vec{x}$, die der Projektion entspricht, degeneriert zur Multiplikation dieses Skalars mit der Zahl 0, wodurch alle diese 'eindimensionalen Vektoren' auf den Ursprung O abgebildet werden.

5. Allgemeiner n-dimensionaler Fall

Für den allgemeinen Fall betrachten wir den Vektorraum V = $M \oplus N$ wiederum als direkte Summe zweier Unterräume M und N, wobei bekanntlich jeder Vektor $\vec{z}$ in V in eindeutiger Weise in der Form $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, mit $\vec{x}$ aus M und $\vec{y}$ aus N, geschrieben werden kann (3). Wie leicht gezeigt werden kann (1), ist eine lineare Transformation A von V auf einen Unterraum M entlang N genau dann eine Projektion, wenn gilt:

$$A^2 = A.$$

Dies ist anschaulich sofort verständlich: Die erneute Projektion eines bereits projizierten Vektors muss dieses Bild invariant belassen!
Nach dem Determinantensatz folgt weiter, dass $(\det(A))^2 = \det(A)$ sein muss, was nur bei orthogonalen Matrizen A mit det(A) = 1 oder singulären Matrizen A mit det(A) = 0 der Fall ist. Da orthogonale Matrizen einer Drehung des Raumes entsprechen, kann det(A) nur gleich Null sein: Jede nichttriviale Projektion wird folglich durch eine lineare Transformation mit singulärer Matrix A beschrieben. Dass eine Projektion eine lineare Abbildung ist, ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung einer Projektion entlang eines beliebigen Basisvektors (3).

Wie ebenfalls leicht gezeigt werden kann (2), ist eine lineare Transformation mit Matrix A genau dann eine Projektion, wenn I–A einer Projektion entspricht, wobei mit I die (n x n) - Einheitsmatrix gemeint ist. Diese Projektion mit Matrix I–A entspricht dann in dualer Weise der Projektion von V auf den Unterraum N entlang M. Also ist mit det(A) auch det(I–A) = 0, es gilt weiter analog: $(I-A)^2 = I-A$, und die Matrix I–A ist ebenfalls singulär.

Aus den oben angeführten Eigenschaften einer Projektionsmatrix lässt sich zeigen, dass eine solche Matrix A nicht nur singulär, sondern auch symmetrisch ist, was hier abschliessend noch als Beweisskizze angeführt werden soll:

Als Voraussetzung betrachten wir zwei Vektoren $\vec{z_1}$ und $\vec{z_2}$, die bereits in eindeutiger Weise in der Form $\vec{z_1} = \vec{x_1} + \vec{y_1}$ resp. $\vec{z_2} = \vec{x_2} + \vec{y_2}$ mit $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ aus M und $\vec{y_1}$, $\vec{y_2}$ aus N, zerlegt worden seien (3), wodurch also gilt: $A\vec{z_1} = A\vec{x_1} = \vec{x_1}$ und $A\vec{z_2} = A\vec{x_2} = \vec{x_2}$.
Zu zeigen ist nun, dass dann $A = A^T$ ist, was aequivalent ist zur Behauptung, dass die folgenden inneren Produkte gleich sind (beachte, dass $(A\vec{z_1}, \vec{z_2}) = (\vec{z_1}, A^T\vec{z_2})$ allgemein gültig ist!):

$$(A\vec{z_1}, \vec{z_2}) = (\vec{z_1}, A\vec{z_2})$$

Die linke Seite ergibt, unter Berücksichtigung der Linearität sowohl von A als auch des inneren Produkts und der Tatsache, dass $(\vec{x_1}, \vec{y_2}) = 0$ ist, den Wert $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$. Das gleiche Resultat ergibt sich auch für die rechte Seite, wenn dort zusätzlich beachtet wird, dass $A\vec{y_2} = 0$ ist. Da dieses Resultat für beliebige Vektoren $\vec{z_1}$ und $\vec{z_2}$ aus V gilt, müssen A und A^T gleich sein, was gerade die Behauptung ist.

6. Umkehrung?

Es stellt sich die Frage, ob jede symmetrische, singuläre Matrix eine Projektion beschreibt. Dies ist offensichtlich nicht der Fall, was am Gegenbeispiel

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sofort klar wird. Die Matrix M ist zwar symmetrisch und singulär, hingegen ist die Aussage $M^2 = M$, was notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass M eine Projektion darstellen würde, falsch. In der folgenden Figur 2 sind zur Illustration ein paar Punkte mit ihren zugehörigen Bildern dargestellt, woraus anschaulich klar wird, dass es sich hier nicht um eine Projektion handelt:

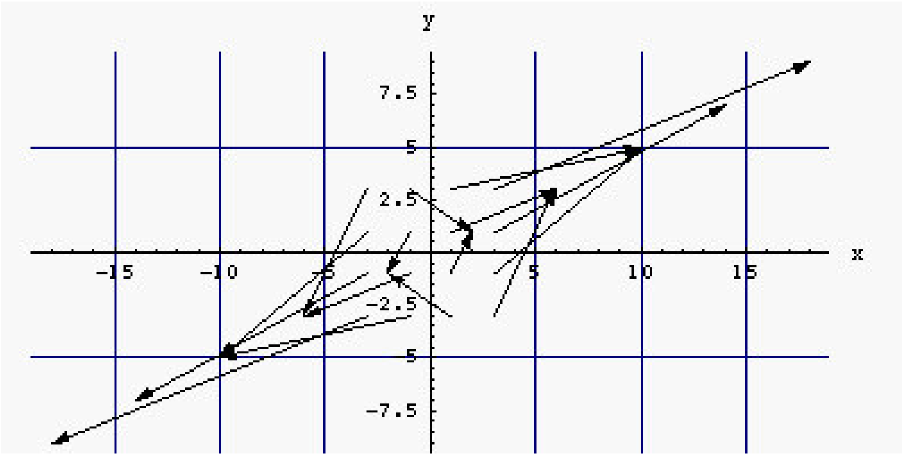


Fig. 2: Illustration der durch die oben angegebene Matrix M definierte Abbildung. Der Originalpunkt befindet sich jeweils am Anfang, der zugehörige Bildpunkt an der Spitze der eingezeichneten Pfeile.

7. Schlussfolgerung

Jede nichttriviale (Normal-) Projektion wird durch eine lineare Transformation mit singulärer und symmetrischer Matrix beschrieben. Hingegen beschreibt nicht jede singuläre, symmetrische Matrix auch eine Projektion.

Literatur:

(1): Paul R. Halmos, FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES, SECOND EDITION, D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC., p. 73.

(2): Gleiche Publikation, p. 74.

(3): M. Jeger / B. Eckmann, Einführung in die vektorielle Geometrie und lineare Algebra, 1967, Birkhäuser Verlag Basel.