Zur Didaktik der speziellen Relativitätstheorie

Die vom Relativitätsprinzip geforderten Transformationen

Oliver Seipel KZO Wetzikon

2-5.4.05

Abstract

Ausgehend nur vom Relativitätsprinzip werden Transformationen hergeleitet, die die Galilei- und Lorentz-Transformationen als Spezialfälle enthalten. Daraus wird ein verallgemeinertes Additionstheorem entwickelt, das zusammen mit dem Experiment von Fizeau 1851 den Schluss nahelegen, dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich gross sein muss.

Galilei- und Lorentztransformation eine Synthese

Nur vom Relativitätsprinzip geforderte Aussagen

Gegeben sind zwei Inertialsysteme S und S', die sich entlang ihrer x-Achsen relativ zueinander bewegen. Das System S' entfernt sich mit $+v$ von S aus betrachtet und zur Zeit $t = t' = 0$ fallen die beiden Urspünge zusammen $x = x' = 0$.

Inertialsystem: *In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.*

Galilei erkannte und formulierte als erster das Relativitätsprinzip für die Mechanik.

Einstein erweiterte seine Gültigkeit auf alle physikalischen Gesetze.

Relativitätsprinzip: *(1. Postulat) Alle Inertialsysteme sind bezüglich pysikalischer Gesetze gleichberechtigt.*

Wird z.B. das Bezugssystem gewechselt, werden einfach alle ungestrichenen Grössen mit gestrichenen und alle v mit $-v$ vertauscht und umgekehrt. Gesucht werden die Transformation

$$S \to S' : (x, t) \mapsto (x', t')$$

und die Rücktransformation

$$S' \to S : (x', t') \mapsto (x, t)$$

Bewegt sich ein Körper bezüglich des Systems S geradlinig gleichförmig, so muss er das auch bezüglich des Systems S'. Daher kommen nur lineare Transformationen in Frage.
Der allgemeinste Ansatz lautet daher:

$$x' = k_1 x + k_2 t \tag{1}$$

Weil beide x-Achsen in dieselbe Richtung zeigen, muss k_1 positiv sein. Dies kann auch als

$$x' = k_1 \left(x + \frac{k_2}{k_1} t \right) \tag{2}$$

geschrieben werden.
Da sich der Koordinatenursprung $x' = 0$ von S' mit v entfernt, gilt von S aus betrachtet $x = vt$. Mit (2) folgt:

$$x' = 0 = k_1 \left(vt + \frac{k_2}{k_1} t \right) \tag{3}$$

und daraus unmittelbar $-\frac{k_2}{k_1} = v$. Daher bleibt nunmehr

$$x' = k_1 (x - vt) \tag{4}$$

übrig.
Der allgemeine lineare Ansatz lautet nun:

$$x' = k\,(x - vt) \tag{5a}$$

Mit dem Relativitätsprinzip folgt

$$x = k\,(x' + vt') \tag{5b}$$

(5a) aufgelöst nach t und Einsetzen von (5b) ergibt

$$t = kt' + x'\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{v} \tag{6a}$$

(5b) aufgelöst nach t' und Einsetzen von (5a), oder das Relativitätsprinzip angewendet auf (6a), ergibt

$$t' = kt - x\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{v} \tag{6b}$$

Aus der Zeittransformation folgt unmittelbar, dass nur ein positives k damit verträglich ist, dass in keinem der beiden Bezugssysteme die Zeit rückwärts läuft.
Diese vier letzten Gleichungen gelten sowohl für Galilei als auch für Einstein. Es ist zu sehen, dass die Grösse $k - \frac{1}{k}$ eine entscheidende Rolle spielt.

Folgerungen aus den Transformationen (5a) bis (6b)

Relativität der Gleichzeitigkeit

Damit $t' = t$ gilt, was klassisch einleuchtend scheint, muss $k = 1$ und damit $k - \frac{1}{k} = 0$ sein. Ist $k \neq 1$ dann gilt auch nicht mehr $t = t'$.
Für zwei in S gleichzeitige Ereignisse gilt mit (6b) in S'

$$\begin{aligned}\Delta t' &= t'_2 - t'_1 \\ &= (x_1 - x_2)\left(k - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{v}\end{aligned} \tag{7}$$

und es ist damit zu sehen, dass eine Gleichzeitigkeit dieser Ereignisse in S' nur dann sein kann , wenn $k = 1$ gilt, d.h. es ist eher die Ausnahme als die Regel!

Der räumliche Abstand

Im System S wird x_1 und x_2 gleichzeitig gemessen. Dann beträgt der Abstand $\Delta x = x_2 - x_1$. Nun ist der räumliche Abstand im System S' gesucht.

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = k(x_2 - x_1) = k\Delta x$$

Der zeitliche Abstand

Im System S wird t_1 und t_2 am gleichen Ort gemessen (dort ruhende Uhr). Der zeitliche Abstand beträgt damit $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = k(t_2 - t_1) = k\Delta t$$

Die Addition der Geschwindigkeit

Die beiden Bezugssysteme sind immer noch die gleichen, nur bewegt sich jetzt noch zusätzlich ein Objekt, das bei $t = t' = 0$ in $x = x' = 0$ gestartet ist. Es gelten daher

$$x = ut \tag{8a}$$

$$x' = u't' \tag{8b}$$

$$x' = k(x - vt) \tag{8c}$$

$$t' = kt - x(k - \frac{1}{k})\frac{1}{v} \tag{8d}$$

Diese vier Gleichungen lassen sich nach u auflösen, indem t', t und x eliminiert werden. Es resultiert:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{k - \frac{1}{k}}{kv}u'} \tag{9}$$

Die Lichtgeschwindigkeit in verschiedenen Bezugssystemen

Erst Aussagen über die Lichtgeschwindigkeit legen den Parameter k eindeutig fest. Daher ist es sinnvoll einen Lichtblitz von beiden Inertialsystemen aus zu beschreiben.
Zur Zeit $t = t' = 0$ wird in S ein Lichtblitz gestartet. In S gilt

$$x = ct \tag{10a}$$

für die Front des Blitzes in S' gilt

$$x' = c't' \tag{10b}$$

Wird (10a) in (5a) eingesetzt ergibt sich

$$x' = k(x - v\frac{x}{c}) = kx(1 - \frac{v}{c})$$

Wird (10b) in (5b) eingesetzt ergibt sich

$$x = k(x' + v\frac{x'}{c'}) = kx'(1 + \frac{v}{c'})$$

Multiplikation ergibt

$$xx' = k^2 xx' \left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c'}\right)$$

und daraus mit $k > 0$ (wegen des Zeitflusses, siehe oben)

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c'}\right)}} \tag{11}$$

Bemerkung: Wie vom Relativitätsprinzip gefordert geht k in sich selbst über, wenn v mit $-v$ und c mit c' vertauscht werden.
Nun kümmern wir uns erst um die Lichtgeschwindigkeit im Bezugssystem S'. Wir machen folgenden Ansatz:

$$c' = c - \alpha v \tag{12}$$

wobei α ein reeller Parameter ist. Wenn $\alpha = 0$ ist, dann haben wir Einsteins 2. Postulat, wenn $\alpha = 1$ ist, dann Galileis und unsere Alltagsvorstellung.
(11) lautet mit (12)

$$k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v}{c})(1 + \frac{v}{c - \alpha v})}} \tag{13}$$

bzw. mit $c = c' + v$

$$k = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{v}{c' + \alpha v})(1 + \frac{v}{c'})}} \tag{14}$$

Wird nun (12) in (11) gesetzt, folgt nach einigen Umformungen:

$$k - \frac{1}{k} = k\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\frac{v}{c}}\frac{v^2}{c^2} \tag{15a}$$

und auch (Relativitätsprinzip!)

$$k - \frac{1}{k} = k\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha\frac{v}{c'}}\frac{v^2}{c'^2} \tag{15b}$$

(15a) wird in (6b), (15b) in (6a) eingesetzt.
Damit lauten die verallgemeinerten Transformationsgleichungen:

$$x' = k\,(x - vt) \tag{16a}$$

$$t' = k\left(t - x\frac{v}{c^2}\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\frac{v}{c}}\right) \tag{16b}$$

$$x = k\,(x' + vt') \tag{16c}$$

$$t = k\left(t' + x'\frac{v}{c'^2}\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha\frac{v}{c'}}\right) \tag{16d}$$

Schauen wir uns jetzt die Spezialfälle von Galilei und Einstein an.
Mit $\alpha = 0$ wird aus (13)

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{17}$$

und aus (16) [aus historischen Gründen $k = \gamma$]

$$x' = \gamma\,(x - vt) \tag{18a}$$

$$t' = \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right) \tag{18b}$$

$$x = \gamma\,(x' + vt') \tag{18c}$$

$$t = \gamma\left(t' + x'\frac{v}{c^2}\right) \tag{18d}$$

Dies sind die Lorentz-Transformationen.
Mit $\alpha = 1$ wird aus (13)

$$k = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c - v}\right)}} = 1 \tag{19}$$

und aus (16)

$$x' = (x - vt) \tag{20a}$$

$$t' = t \tag{20b}$$

$$x = (x' + vt') \tag{20c}$$

$$t = t' \tag{20d}$$

Dies sind die Galilei-Transformationen. Für die Addition der Geschwindigkeiten (21) ergibt sich mit (15a)

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}\frac{1-\alpha}{1-\alpha\frac{v}{c}}} \tag{21}$$

einsetzen von $\alpha = 1$ (Galilei) ergibt

$$u = u' + v \tag{22}$$

und von $\alpha = 0$ (Einstein)

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \tag{23}$$

Fizeau fand 1851 für die Lichtgeschwindigkeit in mit v fliessendem Wasser, mit dem Brechungsindex n, statt der erwarteten $c' = \frac{c}{n} + v$, folgendes[1]

$$c' = \frac{c}{n} + Fv, \qquad F = 0.48 \tag{24}$$

während moderne Experimente den Wert $F = 0.43$ ergeben. Wenn jetzt von (21) mit $u' = \frac{c}{n}$ eine Taylorentwicklung um $v = 0$ gemacht wird, kann der beste Wert für α gefunden werden!
Die Reihenentwicklung ergibt in erster Näherung:

$$\frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^2}\right) v + O(v^2) \tag{25}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit (24) liefert

$$\alpha = 1 - (1 - F)n^2 \tag{26}$$

Mit dem Brechungsindex von Wasser für gelbes Licht von $n = 1.33$ ergibt sich mit $F = 0.48$ für $\alpha = 0.080$ und mit $F = 0.43$ $\alpha = -0.0083$
Es lässt sich also sagen, dass aus dem Relativitätsprinzip und dem Experiment von Fizeau im Rahmen der Messgenauigkeit die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt.

[1] Bergmann/Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik