La transformée de Radon dans le plan

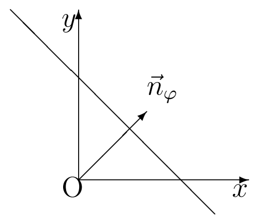
Paul Jolissaint

Les présentes notes sont basées sur l'article original de J. Radon, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. kl. **69**, (1917), 262-277. Je les ai rédigées à l'intention d'un élève du Lycée cantonal de Porrentruy qui désirait effectuer son travail de maturité sur les aspects mathématiques du scanner médical. Pour ce faire, j'ai "digéré" l'article de Radon original afin de présenter la formule d'inversion originale de façon la plus lisible possible pour un lycéen en détaillant le plus possible les calculs.

1 Les droites du plan

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$, soit $d(p, \varphi)$ la droite passant par $(p\cos(\varphi), p\sin(\varphi))$ et de vecteur normal

$$\vec{n}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$



L'équation cartésienne de $d(p, \varphi)$ est :

$$\cos(\varphi)x + \sin(\varphi)y = p$$

et ses équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = p\cos(\varphi) - s\sin(\varphi) \\ y = p\sin(\varphi) + s\cos(\varphi). \end{cases}$

On observe que $d(p, \varphi) = d(-p, \varphi + \pi)$.

2 La transformée de Radon

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable dont les premières dérivées partielles sont continues et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(x,y)|dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} < \infty.$$

Pour $(p, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[$, on pose :

$$\hat{f}(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p\cos(\varphi) - s\sin(\varphi), p\sin(\varphi) + s\cos(\varphi))ds.$$

C'est l'intégrale de f le long de la droite $d(p, \varphi)$ et on l'appelle la **transformée de Radon** de f. On a $\hat{f}(p, \varphi) = \hat{f}(-p, \varphi + \pi)$.

Connaissant la fonction $\hat{f}(p, \varphi)$ pour tous p et φ, on arrive à récupérer $f(x, y)$ grâce au théorème ci-dessous. Pour cela, on introduit une fonction auxiliaire définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $q > 0$: on pose

$$F(x, y, q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) + q, \varphi)d\varphi,$$

et on note $F'(x, y, q)$ (au lieu de $\frac{\partial F}{\partial q}$) la dérivée de $F(x, y, q)$ par rapport à q. On a :

Théorème. *(Radon, 1917) Si f et F sont comme ci-dessus, alors on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$f(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F'(x, y, q)}{q} dq.$$

On va procéder en deux étapes pour démontrer le théorème : la première consiste à vérifier la formule pour $(x, y) = (0, 0)$.

3 Première étape

Puisque, dans cette section, on suppose $x = y = 0$, on note $F(0, 0, q) = F(q)$. Par définition, on constate qu'elle est égale à $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(q, \varphi)d\varphi$.

On part alors de l'intégrale double

$$G(q) = \int\int_{x^2+y^2>q^2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - q^2}} dxdy,$$

où on intègre sur le domaine $D_q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > q^2\}$ qui est l'extérieur du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon q. On va exprimer cette intégrale de deux autres façons en effectuant deux changements de variables. D'une part, posons

$$\begin{cases} x = q\cos(\varphi) - s\sin(\varphi) \\ y = q\sin(\varphi) + s\cos(\varphi) \end{cases}$$

en faisant varier φ entre 0 et 2π et s entre 0 et ∞. Cela revient à intégrer sur la moitié de chaque tangente au cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = q^2.$$

Il est facile de vérifier que $\sqrt{x^2 + y^2 - q^2} = s$, et alors :

$$G(q) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(q\cos(\varphi) - s\sin(\varphi), q\sin(\varphi) + s\cos(\varphi))}{s} \cdot |\frac{J(x, y)}{J(s, \varphi)}| dsd\varphi.$$

L'expression $\frac{J(x,y)}{J(s,\varphi)}$ est appelée le jacobien du changement de variable et il est égal par définition à

$$\frac{J(x, y)}{J(s, \varphi)} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Il est égal, ici, à s. Donc on obtient :

$$G(q) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(q\cos(\varphi) - s\sin(\varphi), q\sin(\varphi) + s\cos(\varphi))dsd\varphi.$$

En intégrant s entre $-\infty$ et 0, on obtient la même intégrale, donc

$$\begin{aligned} G(q) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(q\cos(\varphi) - s\sin(\varphi), q\sin(\varphi) + s\cos(\varphi))dsd\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\varphi)d\varphi = \pi F(q). \end{aligned}$$

D'autre part, effectuons le changement de variables $x = r\cos(\varphi)$ et $y = r\sin(\varphi)$ (coordonnées polaires). On a

$$\frac{J(x,y)}{J(r,\varphi)} = r,$$

et ainsi,

$$G(q) = \int_q^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}.$$

On déduit de cela :

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{1}{\pi}\int_q^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))rdr}{\sqrt{r^2-q^2}} \\ &= \int_q^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2-q^2}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))d\varphi dr \\ &= 2\int_q^{\infty} \frac{\bar{f}(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}, \end{aligned}$$

où

$$\bar{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))d\varphi$$

est la moyenne de f sur le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r. On observe que $f(0,0) = \bar{f}(0)$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et intégrons par parties (en prenant : $u = \frac{1}{q}$ et $v' = F'$) :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{\infty} \frac{F'(q)}{q}dq &= \left[\frac{F(q)}{q}\right]_\varepsilon^{\infty} + \int_\varepsilon^{\infty} \frac{F(q)}{q^2}dq \\ &= -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_\varepsilon^{\infty} \frac{F(q)}{q^2}dq, \end{aligned}$$

car on a :

Lemme. *Si $r \mapsto g(r)$ est continue et si*

$$\int_0^{\infty} |g(r)|dr < \infty,$$

alors

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{q}\int_q^{\infty} \frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}} = 0.$$

Preuve. On écrit

$$\frac{1}{q}\int_q^{\infty}\frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}=\frac{1}{q}\int_q^{2q}\frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}+\frac{1}{q}\int_{2q}^{\infty}\frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}\int_q^{2q}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-q^2}} &= \left[\frac{1}{q}\sqrt{r^2-q^2}\right]_q^{2q}\\ &= \frac{1}{q}\sqrt{4q^2-q^2}=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Soit $q \leq t \leq 2q$ tel que $|g(r)| \leq |g(t)|$ pour tout $r \in [q, 2q]$. On obtient :

$$\frac{1}{q}\int_q^{2q}\frac{|g(r)|rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}\leq \sqrt{3}|g(t)| \to 0$$

lorsque $q \to \infty$.
Ensuite, si $r > 2q$, on a

$$\frac{r}{\sqrt{r^2-q^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{q^2}{r^2}}}<\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Par suite,

$$\frac{1}{q}\int_{2q}^{\infty}\frac{g(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{2q}^{\infty}|g(r)|dr$$

qui tend vers 0 lorsque q tend vers l'infini. □

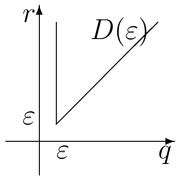
Ainsi, le membre de droite du théorème est :

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{F'(q)}{q}dq &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{F(q)}{q^2}dq\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar{f}(r)rdr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dq}{q^2}\int_q^{\infty}\frac{\bar{f}(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}}\right).\end{aligned}$$

On va intervertir les intégrales sur r et q dans la dernière ci-dessus ; elle est égale à

$$\int\int_{D(\varepsilon)}\frac{\bar{f}(r)rdrdq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}},$$

où $D(\varepsilon) = \{(q, r) \mid \varepsilon \leq q\ , q \leq r\}$.



Elle est donc égale à
$$\int_\varepsilon^\infty \left(\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} \right) \bar{f}(r) r dr.$$
Calculons maintenant $\displaystyle\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}$ en effectuant le changement de variable $q = r\sin(\theta)$, de sorte que $dq = r\cos(\theta)d\theta$, avec les bornes θ_ε et $\pi/2$, où $\sin(\theta_\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{r}$.

On obtient :
$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} &= \int_{\theta_\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{r^2\sin^2(\theta) r\cos(\theta)} r\cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{r^2}\int_{\theta_\varepsilon}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(\theta)} d\theta = -\frac{1}{r^2}\left[\cot(\theta)\right]_{\theta_\varepsilon}^{\pi/2} \\
&= \frac{\cot(\theta_\varepsilon)}{r^2} = \frac{\cos(\theta_\varepsilon)}{r^2\sin(\theta_\varepsilon)} \\
&= \frac{\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{r^2}}}{r\varepsilon} \\
&= \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}.
\end{aligned}$$
Introduisons cela avant de prendre la limite $\varepsilon \to 0$:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)rdr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \int_\varepsilon^\infty \frac{dq}{q^2}\int_q^\infty \frac{\bar{f}(r)rdr}{\sqrt{r^2-q^2}} &= \int_\varepsilon^\infty \bar{f}(r)\left[\frac{r}{\varepsilon\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r\varepsilon}\right] dr \\
&= \int_\varepsilon^\infty \bar{f}(r)\frac{1}{r\varepsilon}\left[\frac{r^2}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \sqrt{r^2-\varepsilon^2}\right] dr \\
&= \int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)}{r\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr \\
&= \varepsilon\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr.
\end{aligned}$$
En résumé, on a obtenu :
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{F'(q)}{q} dq = \frac{2}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr.$$
Il ne reste plus qu'à montrer :
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr = \frac{\pi}{2}\bar{f}(0).$$
On effectue d'abord le changement de variable $r = \varepsilon t$:
$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_\varepsilon^\infty \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} dr &= \varepsilon\int_1^\infty \frac{\bar{f}(\varepsilon t)}{\varepsilon t\varepsilon\sqrt{t^2-1}} \varepsilon dt \\
&= \int_1^\infty \frac{\bar{f}(\varepsilon t)}{t\sqrt{t^2-1}} dt
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\ \varepsilon\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\bar f(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}dr &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{\infty}\frac{\bar f(\varepsilon t)}{t\sqrt{t^2-1}}dt\\ &= \int_1^{\infty}\frac{\lim_{\varepsilon\to 0}\bar f(\varepsilon t)}{t\sqrt{t^2-1}}dt\\ &= \int_1^{\infty}\frac{\bar f(0)}{t\sqrt{t^2-1}}dt = \bar f(0)\int_1^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt.\end{aligned}$$

On calcule enfin $\int_1^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt$ en faisant le changement de variable $t=\frac{1}{\cos(u)}$ donc $dt=\frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}du$, et $u=0$ pour $t=1$, $u\to\pi/2$ pour $t\to\infty$:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}dt &= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\frac{1}{\cos(u)}\sqrt{\frac{1}{\cos^2(u)}-1}}\frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}du\\ &= \int_0^{\pi/2}du=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

4 Deuxième étape

Pour $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ fixé, posons

$$f_{(x_0,y_0)}(x,y)=f(x+x_0,y+y_0),$$

de sorte que $f(x_0,y_0)=f_{(x_0,y_0)}(0,0)$. Pour établir la formule du théorème, montrons d'abord :

$$\hat f_{(x_0,y_0)}(p,\varphi)=\hat f(x_0\cos(\varphi)+y_0\sin(\varphi)+p,\varphi).$$

En effet,

$$\hat f(x_0\cos(\varphi)+y_0\sin(\varphi)+p,\varphi)=$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}f((p+x_0\cos(\varphi)+y_0\sin(\varphi))\cos(\varphi)-s\sin(\varphi),\\ &\qquad (p+x_0\cos(\varphi)+y_0\sin(\varphi))\sin(\varphi)+s\cos(\varphi))ds\\ =\ &\int_{-\infty}^{+\infty}f(p\cos(\varphi)-s\sin(\varphi)+x_0\cos^2(\varphi)+y_0\sin(\varphi)\cos(\varphi),\\ &\qquad p\sin(\varphi)+s\cos(\varphi)+x_0\cos(\varphi)\sin(\varphi)+y_0\sin^2(\varphi))ds\\ =\ &\int_{-\infty}^{+\infty}f(p\cos(\varphi)-(s+x_0\sin(\varphi)-y_0\cos(\varphi))\sin(\varphi)+x_0,\\ &\qquad p\sin(\varphi)+(s+x_0\sin(\varphi)-y_0\cos(\varphi))\cos(\varphi)+y_0)ds\\ =\ &\int_{-\infty}^{+\infty}f(p\cos(\varphi)-s'\sin(\varphi)+x_0,p\sin(\varphi)+s'\cos(\varphi)+y_0)ds'\\ =\ &\int_{-\infty}^{+\infty}f_{(x_0,y_0)}(p\cos(\varphi)-s'\sin(\varphi),p\sin(\varphi)+s'\cos(\varphi))ds'\\ =\ &\hat f_{(x_0,y_0)}(p,\varphi).\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0, q) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(x_0\cos(\varphi) + y_0\sin(\varphi) + q, \varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}_{(x_0,y_0)}(q,\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

d'où finalement

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{F'(x_0, y_0, q)}{q}dq = f_{(x_0,y_0)}(0,0) = f(x_0, y_0).$$

5 Application : le scanner

On considère une tranche (très mince) d'épaisseur Δl de substance homogène sur cette largeur, de densité $f(l)$ (dans des unités convenables). On constate expérimentalement que si on envoie un faisceau de rayons X contre cette tranche, si I_{in} désigne l'intensité du rayon incident et I_{out} celle du rayon qui en sort, alors la différence $\Delta I = I_{in} - I_{out}$ satisfait :

$$\Delta I = I_{in} f(l)\Delta l.$$

Considérons maintenant une masse de largeur L non nécessairement homogène, dont la densité est donnée par une fonction $f(l)$ pour $0 \leq l \leq L$. En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} -\int_{I_0}^{I_f} \frac{dI}{I} &= \int_0^L f(l)dl \\ &= -\ln(I_f/I_0) = \ln(I_0/I_f). \end{aligned}$$

Donc

$$\ln(I_0/I_f) = \int_0^L f(l)dl.$$

Ainsi, si la densité d'un matériau à une niveau donné au point (x, y) est $f(x, y)$, lorsqu'on envoie un mince faisceau de rayons X d'intensité entrante I_0 le long de la droite $d(p, \varphi)$, en mesurant l'intensité sortante $I(p, \varphi)$, cela permet de connaître $\hat{f}(p, \varphi)$. En effectuant de nombreuses mesures en faisant varier les variables (p, φ), on obtient une approximation de $\hat{f}$ qui permet de calculer F, puis finalement f, par la transformée de Radon.

Lycée cantonal de Porrentruy, Place Blarer-de-Wartensee 2, CH-2900 Porrentruy,
paul.jolissaint@jura.ch