



Manipulation von Gleichungen mit CAS

Otto M. Keiser

Auf den gebräuchlichen CAS (= Computer Algebra Systemen) kann man Gleichungen unter beliebigen Variablenamen speichern und auf die Gleichungen beliebige Operationen ausüben. Das Quadrieren einer Gleichung beispielsweise bewirkt das Quadrieren und Gleichsetzen von linker und rechter Seite der ursprünglichen Gleichung. Einen Term zu einer Gleichung addieren bedeutet, diesen Term auf beiden Seiten der Gleichung addieren. Analog funktionieren Summe, Produkt, Quotient etc. von zwei oder mehr Gleichungen.

Nachstehend soll anhand zweier Beispiele gezeigt werden, dass es sich dabei um eine sehr nützliche Option handelt.

Die Ellipsengleichung

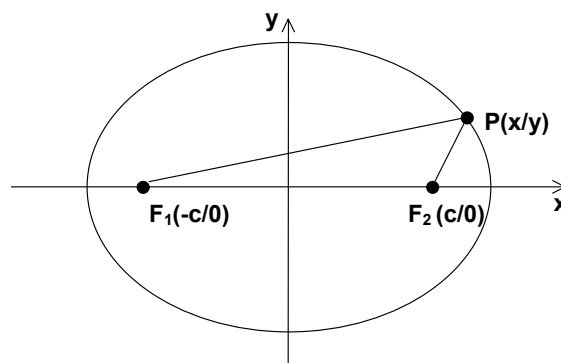
Wir betrachten die Ellipse mit den Halbachsen a und b . Es ist algebraisch recht anspruchsvoll, aus der Brennpunktdefinition der Ellipse die sog. Mittelpunktsform

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der Ellipsengleichung herzuleiten.

Es ist m. E. aber vergleichsweise einfach, die notwendigen Umformungsschritte zu erkennen und zu planen, etwa wie folgt:

Für die Abstände eines Punktes P von den Brennpunkten F_1, F_2 gilt (siehe Figur):



$$\overline{PF}_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\overline{PF}_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Brennpunktdefinition der Ellipse:

$$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$$

Tabellarisch planen wir nun die erforderlichen Umformungsschritte:

Durch beidseitiges

Quadrieren

erhalten wir eine Gleichung mit *nur noch einer Wurzel*:

$$\overline{PF}_1^2 + \overline{PF}_2^2 + 2 \cdot \overline{PF}_1 \cdot \overline{PF}_2 = 4a^2$$

Indem wir beiseitig

$$4a^2 + 2 \cdot \overline{PF}_2 \cdot \overline{PF}_1 \text{ subtrahieren,}$$

isolieren wir diese Wurzel:

$$\overline{PF}_1^2 + \overline{PF}_2^2 - 4a^2 = -2 \cdot \overline{PF}_1 \cdot \overline{PF}_2$$

Durch beidseitiges

Quadrieren

„verschwindet“ diese Wurzel:

$$(\overline{PF}_1^2 + \overline{PF}_2^2 - 4a^2)^2 = (-2 \cdot \overline{PF}_1 \cdot \overline{PF}_2)^2$$

Wenn wir beidseitig die

$$\text{rechte Seite subtrahieren,}$$

können wir hoffen, dass sich *namhafte Vereinfachungen* ergeben.

$$(\overline{PF}_1^2 + \overline{PF}_2^2 - 4a^2)^2 - (-2 \cdot \overline{PF}_1 \cdot \overline{PF}_2)^2 = 0$$

Wenn wir schliesslich durch die Vorgabe

$$c^2 = a^2 - b^2$$

c eliminieren, sollten wir nicht mehr weit vom Ziel sein!

?

Erst nach diesen Vorbereitungen schalten wir das CAS ein. Wir müssen genau die acht Gleichungen bzw. Befehle eintippen, die oben fett gedruckt sind. Und das geht uns erstaunlich leicht von der Hand, wenn wir daran denken, dass wir Gleichungen praktisch wie Terme behandeln können.

Damit wir bei einem allfälligen Tippfehler nicht nochmals von vorne beginnen müssen, schreiben wir die Umformungen, sozusagen auf Vorrat, in eine neue Datei des **Text Editors** im CAS.

Hier tippen wir die acht erwähnten Zeilen, *gekennzeichnet als Kommandos*, so ein, als ob wir im Rechenmodus wären. Als Lehrer kommentieren wir evtl. einzelne Zeilen, damit wir die automatisch gespeicherte Datei später auf Anhieb wieder verstehen (siehe nebenstehendes Protokoll).

Schliesslich bringen wir die Kommandozeilen durch schrittweises „Antippen“ im Rechenfenster zur Ausführung (es ist möglich, den Bildschirm so zu teilen, dass gleichzeitig die Texteditor-Datei und das Rechenfenster sichtbar sind).

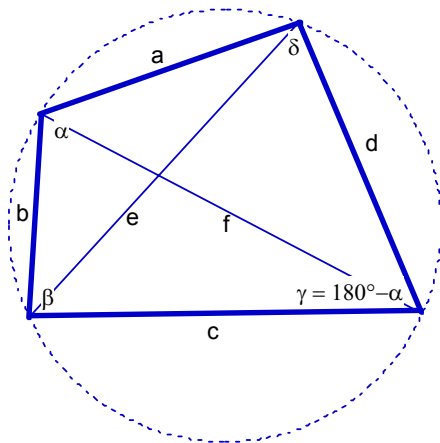
```

: Ellipse
: Abstände
C:√((x+c)^2+y^2)→pf1
C:√((x-c)^2+y^2)→pf2
:
: Ellipsengleichung (=egl)
C:pf1+pf2=2a→egl
:
: Umformungen
C:egl^2→egl
C:egl-(4a^2+2pf1*pf2)→egl
C:egl^2→egl
C:egl-right(egl)→egl
C:egl|c^2=a^2-b^2
    
```

Erstaunt und erleichtert stellen wir fest, dass wir nach diesem „kontrollierten Blindflug“ praktisch am Ziel sind; in der Anzeige steht nämlich:

$$-16 \cdot b^2 \cdot x^2 - 16 \cdot a^2 \cdot y^2 + 16 \cdot a^2 \cdot b^2 = 0$$

Offensichtlich müssen wir diese Gleichung nur noch beidseitig durch $16 \cdot a^2 \cdot b^2$ dividieren, um -im Wesentlichen- die gewünschte Form zu erhalten.



Der Satz des Ptolemäus

Bekanntlich gilt im *Sehnenviereck* (vergl. Figur):

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

In der synthetischen Geometrie kann der Satz mittels geeigneter, durchaus nicht trivialer Hilfslinien auf die Ähnlichkeit von Dreiecken zurückgeführt werden.

Hier soll der Satz (evtl. als willkommene Anwendung) mit Hilfe des näherliegenden Cosinussatzes bewiesen werden. Dabei machen wir wieder ausgiebig Gebrauch von der Möglichkeit, Gleichungen in einem CAS manipulieren zu können (im nachstehenden Text wieder fett hervorgehoben).

Die Diagonale e zerlegt das Sehnenviereck in zwei Dreiecke, für welche mit dem Cosinussatz gelten (beachte $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$):

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{gl11})$$

$$e^2 = c^2 + d^2 + 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos(\alpha) \quad (\text{gl12})$$

Multipliziert man die zwei (gespeicherten) Gleichungen mit geeigneten Faktoren, enthält ihre Summe den Winkel α nicht mehr. In der Tat liefert das CAS nach Eingabe von

$$\text{define gl1} = c \cdot d \cdot \text{gl11} + a \cdot b \cdot \text{gl12} \quad (\text{oder } c \cdot d \cdot \text{gl11} + a \cdot b \cdot \text{gl12} \rightarrow \text{gl1})$$

eine Gleichung, in welcher nur noch die Seiten und Diagonalen des Sehnenvierecks vorkommen:

$$a \cdot b \cdot e^2 + c \cdot d \cdot e^2 = a^2 \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot (c^2 + d^2) + b^2 \cdot c \cdot d \quad (\text{gl1})$$

Sie lässt sich nach e^2 auflösen, weil man auf der linken Seite e^2 ausklammern kann. Die Definition:

$$\text{define gl1} = \frac{\text{gl1}}{a \cdot b + c \cdot d} \quad (\text{oder } \frac{\text{gl1}}{a \cdot b + c \cdot d} \rightarrow \text{gl1})$$

ergibt:

$$e^2 = \frac{a^2 \cdot c \cdot d + a \cdot b \cdot (c^2 + d^2) + b^2 \cdot c \cdot d}{a \cdot b + c \cdot d}$$

Analog kann f^2 berechnet werden:

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad (\text{gl21})$$

$$f^2 = a^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\beta) \quad (\text{gl22})$$

Die Festlegung:

$$\text{define gl2} = \frac{a \cdot d \cdot \text{gl21} + b \cdot c \cdot \text{gl22}}{a \cdot d + b \cdot c} \quad (\text{oder } \frac{a \cdot d \cdot \text{gl21} + b \cdot c \cdot \text{gl22}}{a \cdot d + b \cdot c} \rightarrow \text{gl2})$$

liefert:

$$f^2 = \frac{a^2 \cdot b \cdot c + a \cdot c^2 \cdot d + a \cdot b^2 \cdot d + b \cdot c \cdot d^2}{a \cdot d + b \cdot c}$$

Der Satz des Ptolemäus ergibt sich schliesslich aus dem Produkt der beiden Gleichungen, also durch das Kommando **gl1*gl2**:

$$e^2 \cdot f^2 = (a \cdot c + b \cdot d)^2 \quad \text{somit} \quad \boxed{e \cdot f = (a \cdot c + b \cdot d)}$$

Als Gratiszugabe erhalten wir ein ebenso schönes Resultat für den *Quotienten* der beiden Diagonalen; der Befehl **gl1/gl2** ergibt nämlich:

$$\frac{e^2}{f^2} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)^2}{(a \cdot b + c \cdot d)^2} \quad \text{somit} \quad \boxed{\frac{e}{f} = \frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{(a \cdot b + c \cdot d)}}$$

Schlussbemerkung:

Die beiden Beispiele zeigen m. E., wie CAS gewisse mathematische Herleitungen teilweise trivialisieren kann, und zwar ohne Verlust an mathematischer Substanz! Im Gegenteil: CAS erleichtert es dem Schüler, sich auf die zentralen mathematischen Ideen zu konzentrieren.

Adresse des Autors:
 Hochstrasse 44
 8044 Zürich
 omkeiser@smile.ch