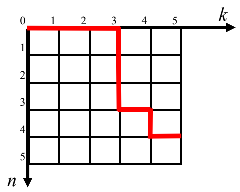
# Anzahl Gitterwege ohne und mit Diagonalen
# oder
# Die Delannoy-Zahlen

Peter Gallin, peter@gallin.ch

Es ist allgemein bekannt, wie viele Gitterwege vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt $(n,k)$ führen, wenn nur Wege längs der Gitterkanten zugelassen sind. Dann haben nämlich alle Wege die Länge $n+k$ und bestehen aus $k$ horizontalen Schritten $(H)$ und $n$ vertikalen Schritten $(V)$. Ein Weg ist also charakterisiert durch eine Folge von $n+k$ Buchstaben $H$ oder $V$. Man muss also von den $n+k$ Stellen nur jene angeben, wo die $k$ Buchstaben $H$ liegen. Das ist eine Kombination ohne Wiederholung von $k$ aus $n+k$. Es gibt also $\binom{n+k}{k}$ Wege. Die nachfolgende Abbildung zeigt links das Gitter mit dem Weg $HHHVVVHVH$ zum Punkt $(4,5)$ und rechts die zugehörige Tabelle mit der Anzahl Wege zu jedem Gitterpunkt hin. Die Zahlen sind die Binomialkoeffizienten und man kann deren Rekursionsformel geometrisch interpretieren, indem man sagt, dass die Anzahl Wege zum Punkt $(n,k)$ sich ergibt als Summe der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n,k-1)$.




| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| 4 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |
| 5 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |

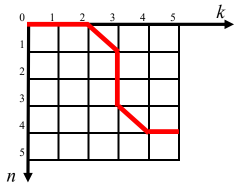
Etwas weniger bekannt ist die Tatsache, dass diese Wege auch anders charakterisiert werden können: Man kann nämlich bloss angeben, in welcher der $n+1$ Zeilen ein horizontaler Schritt gemacht werden soll. Man muss also aus den $n+1$ Zahlen $0,1,\ldots,n$ genau $k$ Zahlen aufsteigend auswählen und zwar mit Wiederholung. Unser Weg wird also durch 0,0,0,3,4 charakterisiert. Das ist das Problem der Kombinationen mit Wiederholung von $k$ aus $n+1$. Offenbar gibt es immer noch $\binom{n+k}{k}$ Wege, womit dieses eher schwierige kombinatorische Problem auch gelöst ist. Setzen wir $n' = n+1$, so heisst also die Antwort:

$$\boxed{\text{Es gibt } \binom{n'+k-1}{k} \text{ Kombinationen mit Wiederholung bei } k \text{ aus } n'.}$$

Wenn nun aber auch Diagonalschritte von Gitterpunkt zu Gitterpunkt zugelassen sind, wenn also im Gitter nicht nur nach Osten und Süden, sondern auch nach Südosten geschritten werden darf, dann wird die Sache etwas komplizierter, weil die Weglänge nicht mehr konstant ist. Zum Glück ist aber die Rekursionsidee nach wie vor anwendbar. Die Anzahl Wege $d_{n,k}$ zum Gitterpunkt $(n,k)$ ist die Summe der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k-1)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n-1,k)$ und der Anzahl Wege zum Punkt $(n,k-1)$. Es gilt also

$$d_{n,k} = d_{n-1,k-1} + d_{n-1,k} + d_{n,k-1} \ .$$

Somit kann man sofort eine entsprechende Tabelle mit den Anzahl Wegen erstellen, wobei sich jetzt die Frage stellt, ob es für die Zahlen der Tabelle — die Delannoy-Zahlen $d_{n,k}$ — auch einen einfachen Berechnungsweg gibt. Eine Internet-Suche mit diesem Stichwort lässt einen zweifeln. Es soll hier ein elementarer Weg gezeigt werden.




| n \ k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 2 | 1 | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 |
| 3 | 1 | 7 | 25 | 63 | 129 | 231 |
| 4 | 1 | 9 | 41 | 129 | 321 | 681 |
| 5 | 1 | 11 | 61 | 231 | 681 | 1683 |

**Die Delannoy-Zahlen** $d_{n,k}$

Die Methode, die uns zum Ziel führt, ähnelt sehr derjenigen, die ich beim Artikel zur Menschenpyramide im Bulletin Nr. 144 angewandt hatte. Dort führte sie allerdings auf ein wenig befriedigendes Ergebnis, das dann im Bulletin Nr. 145 verbessert wurde.

Die folgende Tabelle zeigt in der ersten Spalte die Zahlen $d_{n,k}$ aus der Spalte $k = 4$ der obigen Tabelle. In der zweiten Spalte steht die erste Differenzenfolge. Man stellt fest, dass die vierte Differenzenfolge konstant ist. Das bedeutet, dass die Delannoy-Zahlen in der Spalte $k$ arithmetische Folgen $k$-ter Ordnung sind. Die eingerahmten Startzahlen der Differenzenfolgen nennen wir Randzahlen und bezeichnen sie mit $r_{k,i}$, wobei der Index $i$ von 0 bis $k$ läuft.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $d_{0,4}$ = | 1 | 4 | | | |
| $d_{1,4}$ = | 9 | 8 | 6 | | |
| $d_{2,4}$ = | 41 | 32 | 24 | 4 | |
| $d_{3,4}$ = | 129 | 88 | 56 | 32 | 1 |
| $d_{4,4}$ = | 321 | 192 | 104 | 48 | 16 |
| $d_{5,4}$ = | 681 | 360 | 168 | 64 | 16 |

Im Bulletin Nr. 120 vom September 2012 habe ich gezeigt, dass eine arithmetische Folge $k$-ter Ordnung aus den Randzahlen gewonnen werden kann, so dass wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$d_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} r_{k,i} \binom{n}{i}$$

Man kann sich diesen Aufbau auch direkt überlegen, indem man eine Zahl $d_{n,k}$ als Summe ihrer Nachbarn oben und rechts denkt und diese Nachbarn wiederum als Summe der Nachbarn, so dass die Summanden mit den Binomialkoeffizienten gewichtet werden müssen. Zu beachten ist, dass für $i > n$ die Binomialkoeffizienten wegfallen. Man summiert also bei $n < k$ nur bis $i = n$.

Dividiert man nun die Randzahlen durch Zweierpotenzen, und zwar durch $2^i$, so ergeben sich direkt die Binomialkoeffizienten der $k$-ten Zeile des Pascal-Dreiecks. Ich habe diese Binomialkoeffizienten über den eingerahmten Randzahlen notiert. Dies gilt für alle $k$, was zu beweisen wäre. Wir erhalten also:

$$r_{k,i} = 2^i \binom{k}{i}$$

Damit ergibt sich bereits die Schlussformel für die Delannoy-Zahlen:

$$\boxed{d_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{\min(n,k)} 2^i \binom{k}{i} \binom{n}{i}}$$

Erst durch das Verdeutlichen der oberen Summationsgrenze $i = \min(n, k)$ wird klar, dass die Formel symmetrisch in $n$ und $k$ ist. Jetzt müsste noch bewiesen werden, dass die Rekursionsformel

$$d_{n+1,k+1} \stackrel{?}{=} d_{n,k} + d_{n,k+1} + d_{n+1,k}$$

erfüllt wird. Diese etwas knifflige Übung im Umbauen von Binomialkoeffizienten empfehle ich den geneigten Leserinnen und Lesern. Der Beweis steht zur Kontrolle auf den nächsten Seiten.

Beweis: Wir schreiben beide Seiten der fraglichen Gleichung gemäss der eingerahmten Formel um:

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i}\binom{n+1}{i} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i}\binom{n+1}{i}$$

Nun bearbeiten wir die linke Seite ($LS$) mit der Grundeigenschaft der Binomialkoeffizienten und vereinheitlichen den Summationsindex auf die obere Grenze $i = k$:

$$LS = \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i}\binom{n+1}{i} = 2^{k+1}\binom{n+1}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right)\left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}\right) =$$

$$= 2^{k+1}\binom{n}{k} + 2^{k+1}\binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \left[\binom{k}{i-1}\binom{n}{i-1} + \binom{k}{i-1}\binom{n}{i} + \binom{k}{i}\binom{n}{i-1} + \binom{k}{i}\binom{n}{i}\right] =$$

$$= 2^{k+1}\binom{n}{k} + 2^{k+1}\binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i-1}\binom{n}{i-1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \left[\binom{k}{i-1}\binom{n}{i} + \binom{k}{i}\binom{n}{i-1} + \binom{k}{i}\binom{n}{i}\right]$$

Jetzt wenden wir uns der rechten Seite ($RS$) zu und vereinheitlichen die obere Summationsgrenze und die oberen Zahlen in den Binomialkoeffizienten:

$$RS = \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k+1} 2^i \binom{k+1}{i}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i}\binom{n+1}{i} =$$

$$= 2^{k+1}\binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \left[\binom{k}{i}\binom{n}{i} + \left(\binom{k}{i}\binom{n}{i} + \binom{k}{i-1}\binom{n}{i}\right) + \left(\binom{k}{i}\binom{n}{i} + \binom{k}{i}\binom{n}{i-1}\right)\right] =$$

$$= 2^{k+1}\binom{n}{k+1} + \sum_{i=0}^{k} 2^{i+1} \binom{k}{i}\binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \left[\binom{k}{i-1}\binom{n}{i} + \binom{k}{i}\binom{n}{i} + \binom{k}{i}\binom{n}{i-1}\right]$$

Vergleicht man die umgewandelten linken und rechten Seiten, so erkennt man, dass ein Summand ohne Summenzeichen und die Summe mit den eckigen Klammern übereinstimmen. Damit bleibt nur noch Folgendes zu beweisen:

$$2^{k+1}\binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k} 2^i \binom{k}{i-1}\binom{n}{i-1} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{k} 2^{i+1} \binom{k}{i}\binom{n}{i}$$

In der linken Summe können wir den Index von $i = 1$ an laufen lassen, da für $i = 0$ der Summand verschwindet. Gleichzeitig schreiben wir $j$ anstatt $i$:

$$2^{k+1}\binom{n}{k} + \sum_{j=1}^{k} 2^j \binom{k}{j-1}\binom{n}{j-1} \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{k} 2^{i+1} \binom{k}{i}\binom{n}{i}$$

Nun ersetzen wir $j = i + 1$ oder $i = j - 1$ und erhalten eine korrekte Aussage:

$$2^{k+1}\binom{n}{k} + \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+1} \binom{k}{i}\binom{n}{i} \stackrel{\checkmark}{=} \sum_{i=0}^{k} 2^{i+1} \binom{k}{i}\binom{n}{i}$$