DMK

Fixpunktfreie Permutationen

Georg Keller, Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

1 Einleitung

Im letzten VSMP-Bulletin wurde von anderer Seite dargelegt, wie die Wahrscheinlichkeiten für fixpunktfreie Permutationen resp. für solche mit k Fixpunkten berechnet werden können. Vor etwa einem halben Jahr habe ich mir - angeregt durch unsere Schüler - dieselbe Aufgabe gestellt und dabei einen alternativen und, aus Sicht einiger Fachkollegen, schönen Lösungsweg gefunden.

Diese Aufgabe wurde deswegen durch unsere Schüler angeregt, weil viele unserer Klassen in der Adventszeit „wichteln". D.h. in einer solchen Klasse schreiben die Schüler ihre Namen auf jeweils ein Stück Papier, legen diese Papierstücke in eine „Urne" und jeder zieht dann blind eines der Papierstücke; sofern der gezogene Name nicht der eigene ist, wird der Ziehende während der Adventszeit dem Gezogenen wenige Male ein kleines Geschenk machen, und zwar so, dass der Beschenkte nicht weiss, von wem das Geschenk ist. Eine Frage, die sich hier natürlicherweise stellt, ist, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine solche Namensziehungs-Runde „funktioniert", d.h. dass keiner der Ziehenden den eigenen Namen zieht. Mathematisch ist dies gleichbedeutend zur Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zufällige Permutation von n Elementen keinen Fixpunkt hat.

Diese Wahrscheinlichkeit soll im Folgenden für alle $n \in \mathbb{N}$ berechnet werden, und ausserdem soll das asymptotische Verhalten dieser Wahrscheinlichkeiten für $n \to \infty$ untersucht werden.

2 Wahrscheinlichkeitsberechnung

Wir definieren (nicht nur für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern zwecks einheitlicher Darstellung der anschliessenden Überlegungen auch für $n = 0$)

$$f(n) \coloneqq \begin{cases} 1\,, & n = 0 \\ \text{Anzahl fixpunktfreier Permutationen von n Elementen}\,, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad . \tag{1}$$

Mit Hilfe der nachfolgend beschriebenen kombinatorischen Überlegungen erhalten wir für $n \geq 1$ die Rekursionsgleichung

$$f(n) = n! - \binom{n}{1} f(n-1) - \binom{n}{2} f(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1} f(1) - \binom{n}{n} f(0) \quad . \tag{2}$$

Begründung von (2): Die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen von n Elementen, d.h. $f(n)$, ist doch gleich …

- der Anzahl aller Permutationen von n Elementen ($= n!$) …
- minus die Anzahl aller Permutationen mit genau 1 Fixpunkt (= Anzahl aller Möglichkeiten zur Wahl des Fixpunktes ($= \binom{n}{1}$) mal Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen der restlichen $n-1$ Elemente

(= $f(n-1)$)) …
- minus die Anzahl aller Permutationen mit genau 2 Fixpunkten (= Anzahl aller Möglichkeiten zur Wahl der 2 Fixpunkte (= $\binom{n}{2}$) mal Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen der restlichen $n-2$ Elemente (= $f(n-2)$)) …
- etc.

Die letztlich interessierenden Wahrscheinlichkeiten $p(n)$ (nicht nur für $n \in \mathbb{N}$, sondern aus Einheitlichkeitsgründen auch für $n = 0$) sind definiert als

$$p(n) \coloneqq \begin{cases} 1\,, & n = 0 \\ P(\text{eine zufällige Permutation von n Elementen ist fixpunktfrei})\,, & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad . \tag{3}$$

Weil natürlich

$$p(n) = \frac{f(n)}{n!} \tag{4}$$

ist, erhalten wir mittels Division von (2) durch $n!$ und via (4) eine Rekursionsgleichung für $p(n)$:

$$\begin{aligned} p(n) &= 1 - \frac{n!}{1!\,(n-1)!\,n!} f(n-1) - \frac{n!}{2!\,(n-2)!\,n!} f(n-2) - \cdots - \frac{n!}{(n-1)!\,1!\,n!} f(1) - \frac{1}{n!} f(0) \\ &= 1 - \frac{1}{1!} p(n-1) - \frac{1}{2!} p(n-2) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} p(1) - \frac{1}{n!} p(0) \end{aligned} \tag{5}$$

Um daraus eine explizite Darstellung für $p(n)$ zu gewinnen, nehmen wir zuerst in (5) alle Terme mit $p(j)$ auf die linke Seite, was zu

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} p(n-j) = 1 \tag{6}$$

führt. Motiviert durch die spezielle Struktur der linken Seite von (6) betrachten wir jetzt die erzeugende Funktion $w(x)$ aller $p(n)$, d.h.

$$w(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n \quad , \tag{7}$$

welche mindestens für $|x| < 1$ absolut konvergiert (oder als formale Potenzreihe in x betrachtet werden kann). Für $|x| < 1$ können wir nun Folgendes beobachten:

$$e^x\, w(x) \overset{(7)}{\triangleq} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} p(k)\, x^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!} p(k)\, x^{j+k} \quad ,$$

was durch geeignetes Ändern der Summationssystematik (statt über die unabhängigen Indizes j und k summieren wir jetzt erstens über $j+k =: n$ (von 0 bis ∞) und zweitens, für gegebenes n , über j (von 0 bis n)) ergibt

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} p(n-j)\right) x^n \overset{(6)}{\triangleq} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad .$$

Es gilt also die einfache Gleichung $e^x\, w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, welche wir durch e^x dividieren:

$$w(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^j}{j!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} x^{j+k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}\right) x^n \quad ,$$

woraus wir aufgrund von (7) die explizite Darstellung von $p(n)$ ablesen können:

$$p(n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \quad . \tag{8}$$

Aus (8) folgt das asymptotische Verhalten $\lim_{n \to \infty} p(n) = e^{-1}$, wobei die Konvergenz sehr rasch erfolgt (Resultate auf 6 Stellen nach dem Komma gerundet):

n	**p(n)**
1	0
2	0.5
3	0.333333
4	0.375
5	0.366667
6	0.368056
7	0.367857
8	0.367881
9	0.367879
10	0.367879
11	0.367879
12	0.367879
…	…
∞	0.367879

3 Anmerkungen

Tatsächlich hat die damals von mir befragte Klasse 3-mal probieren müssen, bis die Namensziehungs-Runde „funktionierte".

Und noch eine Bemerkung zu Permutationen mit k Fixpunkten: Gemäss der zu (5) führenden Überlegung ist $p(n, k)$:= P(eine zufällige Permutation von n Elementen hat k Fixpunkte) $= \frac{1}{k!} p(n-k)$, was via (8) zu folgendem Resultat führt: $p(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$ und $\lim_{n \to \infty} p(n, k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$.