Permutations à points fixes dans les probabilités

Eugène Pasquier, eu.pasquier@hispeed.ch

Résumé

La résolution de certains problèmes permet d'introduire et de relier entre eux différents concepts mathématiques. La situation proposée ci-après me semble particulièrement favorable à ce genre d'activité.

1 Le problème des permutations sans point fixe

On dispose de n boules numérotées de 1 à n et n boîtes également numérotées de 1 à n. On place au hasard une boule dans chaque boîte. Déterminer la probabilité qu'aucune boule ne soit placée dans la boîte portant son numéro. En faisant l'hypothèse que les événements élémentaires sont équiprobables, il s'agit de calculer le nombre de cas favorables à l'événement considéré, c'est-à-dire le nombre de permutations n'ayant aucun point fixe. On appellera dorénavant dérangement un tel événement. Si le nombre des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, 2, ..., n\}$ est $n!$, nous noterons d_n le nombre des éléments de l'ensemble D_n des dérangements de E_n. Dès lors la probabilité qu'aucune boule parmi les n boules données ne soit placée dans la boîte portant son numéro est égale à $p_n = \frac{d_n}{n!}$.

1.1 Première relation de récurrence

Calcul de d_n pour quelques petites valeurs de n

n=1

$$E_1 = \{1\}$$
$$D_1 = \{\}$$
$$d_1 = 0$$

n=2

$$E_2 = \{1, 2\}$$
$$D_2 = \{(1\ 2)\}$$
$$d_2 = 1$$

n=3

$$E_3 = \{1, 2, 3\}$$
$$D_3 = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$
$$d_3 = 2$$

n=4

$$\begin{aligned} E_4 &= \{1, 2, 3, 4\} \\ D_4 &= \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), \\ &\quad (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\} \\ d_4 &= 9 \end{aligned}$$

Autre point de vue pour le calcul de d_4

On peut aussi considérer toutes les permutations f de E_4 et ôter celles qui possèdent au moins un point fixe ($f(p) = p$ pour un $p \in E_4$).

Le nombre de permutations de E_4 qui contiennent k points fixes est $C_k^4\ d_{4-k}$. On a donc :

$$\begin{aligned} d_4 &= 4! - (1 + C_3^4\ d_1 + C_2^4\ d_2 + C_1^4\ d_3) \\ &= 24 - (1 + 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2) \\ &= 24 - 15 = 9 \end{aligned}$$

Pour d_5 on trouve :

$$d_5 = 5! - (1 + C_4^5\ d_1 + C_3^5\ d_2 + C_2^5\ d_3 + C_1^5\ d_4)$$

En prolongeant le raisonnement pour d_n, on obtient :

$$d_n = n! - (1 + C_{n-1}^n\ d_1 + C_{n-2}^n\ d_2 + \cdots + C_1^n\ d_{n-1}) \tag{1}$$

On vérifie aisément que l'on obtient les mêmes valeurs que dans le calcul précédent.

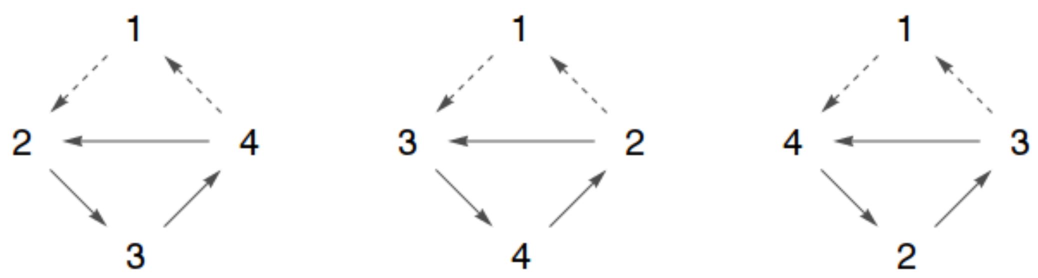
1.2 Deuxième relation de récurrence

La formule ci-dessus est peu commode, car elle exige le calcul préalable et le stockage de toutes les valeurs de $d_k,\ k < n$. Nous allons trouver une formule de récurrence qui ne fait intervenir que d_{n-1} et d_{n-2} dans le calcul de d_n.

Partition de l'ensemble D_n

Considérons d'abord l'ensemble A_n des permutations de D_n telles que $f(1) = k$ et $f(k) = 1$. Il y a $n-1$ possibilités de choisir $k = f(1)$. Le nombre d'éléments de A_n est donc égal à

$$a_n = (n-1)\ d_{n-2}$$



Considérons ensuite l'ensemble B_n des permutations de D_n, complémentaire de A_n par rapport à D_n, et notons b_n le nombre de ces permutations.

$$f \in B_n \ \Leftrightarrow\ f(1) = k \text{ et } f(h) = 1 \text{ pour } h \neq k$$

A chaque permutation f de B_n on peut associer une permutation g de l'ensemble $\{2, 3, \ldots, n\}$ comme suit.

Si $f(1) = k$ et $f(h) = 1$, on pose $g(h) = k$. Dans les autres cas, $g(p) = f(p)$

Etant donné que toute permutation se décompose en permutations circulaires disjointes et en tenant compte que pour chacune de ces dernières on peut appliquer le schéma ci-dessus, on en déduit alors qu'une permutation g donnée peut provenir de $n-1$ dérangements différents de B_n. On a dès lors

$$b_n = (n-1)\ d_{n-1}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d_n &= a_n + b_n \\ &= (n-1)\ d_{n-2} + (n-1)\ d_{n-1} \\ &= (n-1)\ (d_{n-1} + d_{n-2}) \end{aligned} \tag{2}$$

Connaissant $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$ on peut calculer d_n de proche en proche en ne conservant en mémoire que les deux dernières valeurs obtenues.

1.3 Troisième relation de récurrence

On peut améliorer la formule (2) comme suit :

$$\begin{aligned} & d_n = (n-1)\ (d_{n-1} + d_{n-2}) \\ \Leftrightarrow\ & d_n - n\ d_{n-1} = -(d_{n-1} - (n-1)\ d_{n-2}) \end{aligned}$$

Posons $u_n = d_n - n\ d_{n-1}$ et montrons que $u_n = (-1)^n$ en utilisant un raisonnement par récurrence.

n=2

$$u_2 = d_2 - 2\ d_1 = 1 - 0 = 1 = (-1)^2$$

n=3

$$u_3 = d_3 - 3\ d_2 = 2 - 3 \cdot 1 = -1 = (-1)^3$$

n $\mapsto$ n+1

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= d_{n+1} - (n+1)\ d_n = n\ (d_n + d_{n-1}) - (n+1)\ d_n \\ &= n\ d_{n-1} - d_n = -(d_n - n\ d_{n-1}) \\ &= -u_n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $d_n - n\ d_{n-1} = (-1)^n$ et

$$d_n = (-1)^n + n\ d_{n-1} \tag{3}$$

1.4 Formule explicite pour le calcul de p_n

$$p_n = \frac{d_n}{n!} = \frac{(-1)^n + n\ d_{n-1}}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{d_{n-1}}{(n-1)!}$$

D'où

$$p_n = p_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} \\ p_3 &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \\ p_4 &= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \\ p_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned} \tag{4}$$

On reconnait le développement de e^{-1}. Ainsi,

$$\lim_{n \mapsto \infty} p_n = \frac{1}{e}$$

De la formule (4), on déduit alors que le nombre de permutations sans point fixe est

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

2 Le problème de permutations avec un nombre donné de points fixes

Intéressons-nous maintenant à la probabilité que k boules exactement aient été bien placées. Considérons d'abord un ensemble particulier où exactement k boules ont été bien placées. La probabilité qu'aucune des $n-k$ boules restantes ne soit bien placée est

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

On en déduit que le nombre de cas où, pour l'ensemble particulier choisi, aucune des $n-k$ boules ne soit bien placée est

$$(n-k)!\ \big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\big)$$

Comme il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir ces k boules bien placées, il y a donc

$$\binom{n}{k}\ (n-k)!\ \big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\big)$$

éventualités où exactement k boules sont bien placées. La probabilité de retrouver exactement k boules bien placées est ainsi égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{\binom{n}{k}\ (n-k)!\ \big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\big)}{n!} \\
=\ &\frac{n!\ (n-k)!\ \big(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\big)}{(n-k)!\ k!\ n!} \\
=\ &\frac{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}{k!} \\
=\ &\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}
\end{aligned}$$

On constate que la variable aléatoire indiquant le nombre de boules bien placées suit une loi de Poisson avec $\lambda = 1$ et $\mu = 1$.

Le problème présenté dans cet article est également appelé problème des rencontres. On en trouvera un exemple d'application dans le problème des chapeaux de l'exercice 29 p.38 de l'ouvrage "Probabilités" publié par la CRM.