Letzte zwei Ziffern von aufeinander folgenden Primzahlen

H.U. Keller (hukkeller@bluewin.ch), MNG Zürich

"Aufeinander folgende Primzahlen wiederholen ihre Endziffer nur ungern": Dies war die Folgerung der Mathematiker Kannan und Soundararajan von der kalifornischen Stanford–Universität nach ihrer Untersuchung der Übergangshäufigkeiten der letzten Ziffern von aufeinander folgenden Primzahlen (vgl. dazu auch das VSMP–Bulletin Nr. 135 vom September 2017, S. 3).

Interessant ist in diesem Zusammenhang natürlich auch die Frage, wie gross die Übergangshäufigkeiten nicht nur bei der letzten Ziffer allein, sondern bei den letzten beiden Ziffern von zwei aufeinander folgenden Primzahlen sind. Da es ab der dritten Primzahl p[3] = 5 nur 40 Möglichkeiten für die letzten beiden Ziffern der weiteren Primzahlen gibt, ergeben sich auch nur gerade 1600 mögliche Übergänge: Wenn wir die n–te Primzahl mit p[n] bezeichnen, so ist z. B. der Übergang von p[62] = 293 zu p[63] = 307 einer unter einer Vielzahl von Übergängen der letzten beiden Ziffern von "…93" zu "…07".

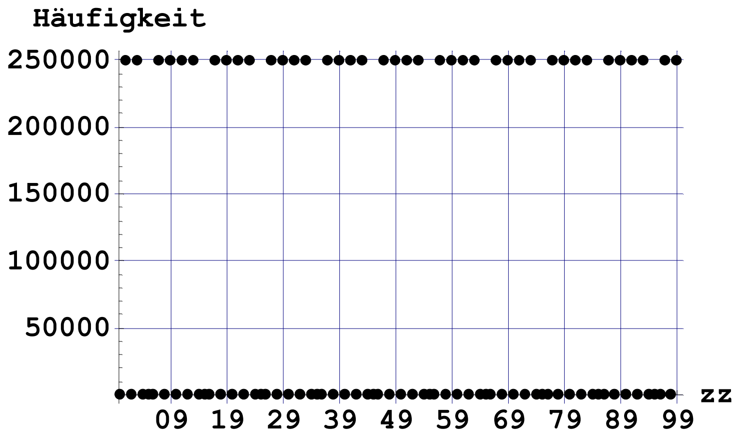

Fig. 1: Häufigkeit der letzten beiden Ziffern "…zz".

Wegen der steigenden Rechenzeit habe ich mich hier auf die ersten 10 Millionen Primzahlen > p[4]= 7 beschränkt.

Zunächst zeigt sich, dass die letzten beiden Ziffern recht gleichmässig verteilt sind: Alle Paare kommen mit der ungefähr gleichen und erwarteten Häufigkeit von etwa einer viertel Million vor, wie sich dies aus der Fig. 1 ergibt.

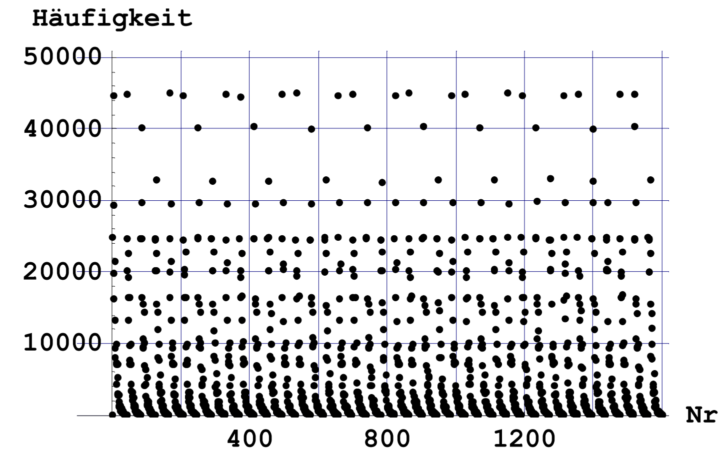

Fig. 2: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von p[n] zu p[n+1].

Die Häufigkeiten von jedem der 1600 möglichen Übergänge, von '…01' → '…03' bis '…97' → '…99', können leicht ausgezählt werden und von '0103' bis '9799' geordnet und mit je einer Nummer Nr von 1 bis 1600 durchnummeriert werden. Werden diese Häufigkeiten graphisch dargestellt, ergibt sich ein absolut erstaunliches, unerwartetes und hübsches Muster, das in Fig. 2 dargestellt ist.

Es fällt sofort auf, dass gewisse Übergänge in immer gleichen Abständen und mit etwa den gleichen Häufigkeiten auftreten. Die 20 Spitzenreiter – alle mit einer Häufigkeit von mehr als 44'000, aber weniger als 46'000 – sind in der folgenden Tabelle in Fig. 3 aufgezählt.

ΔNr:	Nr:	von …zz:	–>	nach …zz:		ΔNr:	Nr:	von …zz:	–>	nach …zz:
–	3	01	–>	07		–	44	03	–>	09
164	167	11	–>	17		164	208	13	–>	19
164	331	21	–>	27		164	372	23	–>	29
164	495	31	–>	37		164	536	33	–>	39
164	659	41	–>	47		164	700	43	–>	49
164	823	51	–>	57		164	864	53	–>	59
164	987	61	–>	67		164	1028	63	–>	69
164	1151	71	–>	77		164	1192	73	–>	79
164	1315	81	–>	87		164	1356	83	–>	89
164	1479	91	–>	97		164	1520	93	–>	99

Fig. 3: Die 20 Übergänge mit den grössten Häufigkeiten (mit $\mu = 44800.7$ und $\sigma = 149.2$ (!)).

Erstaunlich ist dabei vor allem, dass die gleichen Einerzifferübergänge immer wieder in den gleichen Abständen erscheinen, und zwar mit einer konstanten Differenz der Nummern ΔNr von 164, aber auch mit einer ebenfalls konstanten Differenz von 41 in den Nummern 3 bis 44, 167 bis 208, etc., und gleichfalls konstanter Differenz von $3 \cdot 41 = 123$ in den Nummern von 44 bis 167, 208 bis 331, etc.!

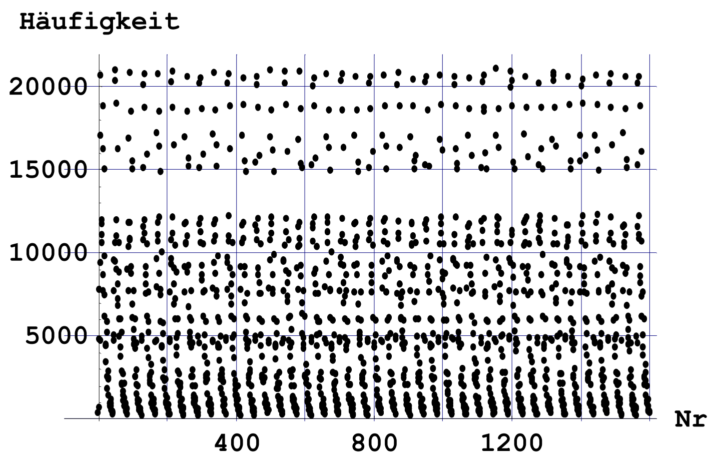

Fig. 4: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von p[n] zu p[n+2].

Wie steht es weiter mit den Häufigkeiten der Übergänge der letzten beiden Ziffern einer Primzahl p[n] zu denen ihres übernächsten Nachbarn p[n+2]? Auch hier ist wieder eine bemerkenswerte Struktur sichtbar, wie sich dies aus dem Diagramm in Fig. 4 ergibt.

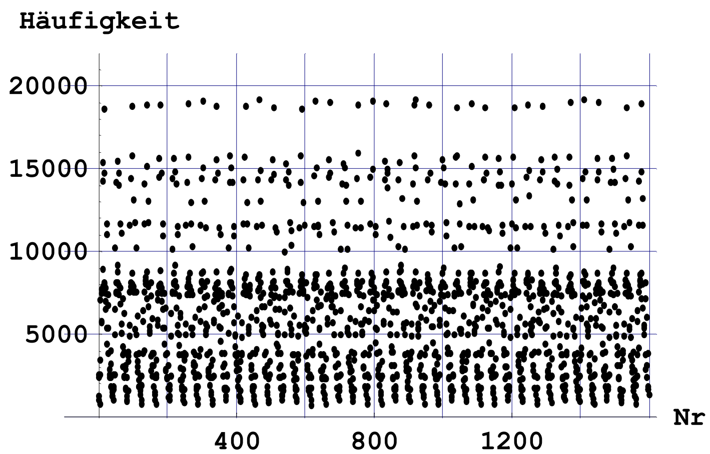

Fig. 5: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von p[n] zu p[n+3].

Die Häufigkeit der Übergänge der letzten zwei Ziffern einer Primzahl p[n] zu denen ihres überübernächsten Nachbarn p[n+3] zeigt ebenfalls eine interessante Struktur, wie sich dies auf dem Diagramm in Fig. 5 sehen lässt.

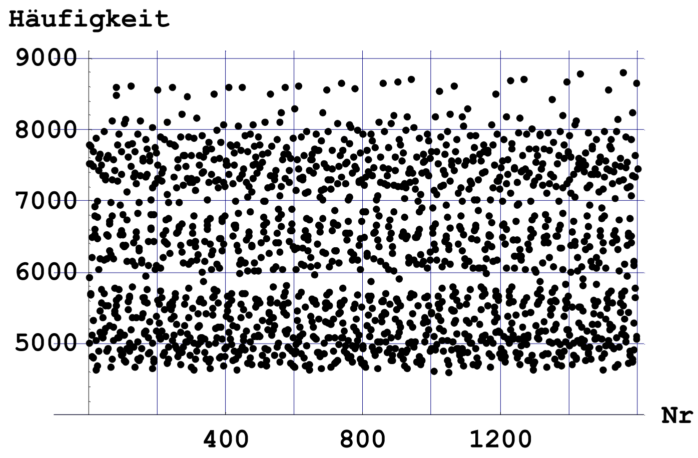

Fig. 6: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von p[n] zu p[n+17].

Die Häufigkeiten der Übergänge zu jeweils weiter entfernteren Nachbarn scheinen sich etwas anzugleichen, aber gewisse Strukturen sind immer noch klar ersichtlich. Werden beispielsweise die Häufigkeiten des Überganges der letzten beiden Ziffern zu denen ihres 17. Nachbarn gezählt, also von p[n] zu p[n+17], ergibt sich das in Fig. 6 wiedergegebene Häufigkeitsdiagramm.

Werden nicht die beiden Endziffern der ersten 10 Millionen Primzahlen, sondern die beiden Endziffern der Primzahlen von p[30'000'001] = 573'259'433 bis p[40'000'000] = 776'531'401 mit denen ihrer jeweiligen unmittelbaren Nachbarn verglichen, ergibt sich das Diagramm in Fig. 7.

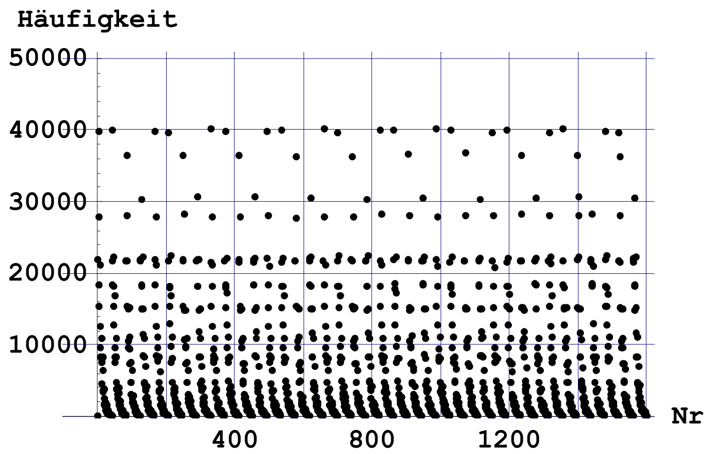

Fig.7: Häufigkeit der 1600 möglichen Übergänge der letzten beiden Ziffern von p[n] zu p[n+1] für 30'000'001 $\leq$ n $\leq$ 40'000'000.

Diese Häufigkeitsverteilung hat eine nicht unerwartete Ähnlichkeit mit den in Fig. 2 wiedergegebenen Häufigkeiten, wobei die maximalen Häufigkeiten – für mich nicht ganz erklärlich – mit rund 40'000 hier deutlich kleiner sind als die etwa 44'800 Vorkommnisse beim Vergleich bei den ersten 10 Millionen Primzahlen und ihren direkten Nachbarn.

Als Schluss:
Vielleicht ergeben sich durch ein genaueres Studium der Übergangshäufigkeiten der letzten 1, 2, 3, … Endziffern einer Primzahl p[n] zu den entsprechenden Endziffern ihrer nächsten oder weiter entfernteren Nachbarn p[n+1], p[n+2], p[n+3], … neue Einblicke in die Verteilung der Primzahlen innerhalb der natürlichen Zahlen. Es scheint, dass in der Musik der Primzahlen immer noch manch ein bis anhin unbekannter Klang gefunden werden könnte!