Pythagoräische Zahlentripel und Kettenbrüche

René Fehlmann, Gymnasium Neufeld, rene.fehlmann@gymneufeld.ch

1 Einleitung

Bekanntlich schrieb Pierre de Fermat in seine Ausgabe der "Arithmetika" des Diophantos von Alexandria folgende Zeilen als Randbemerkung:

> "Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."

Das Beispiel illustriert sehr schön, dass zahlentheoretische Problemstellungen oft sehr einfach zu verstehen sind (sobald die sprachlichen Hürden überwunden wurden). Darunter befinden sich aber oftmals – nicht nur für die Lernenden in der Schule – zu hoch hängende Früchte. Umso mehr lohnt es sich, die Lernenden diejenigen Früchte ernten zu lassen, die einfach zu erreichen sind. Hier sollen deshalb ein paar Aspekte der diophantischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

besprochen werden, die durchaus Platz in einem gymnasialen Unterricht finden.

2 Pythagoräische Zahlentripel

Lösungen der diophantischen Gleichung (1) nennt man *pythagoräische Zahlentripel*. Falls (x, y, z) solch eine Lösung ist, dann löst auch jedes Vielfache (nx, ny, nz) mit $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung (1). Es genügt deshalb diejenigen Lösungen zu suchen, die keinen gemeinsamen Teiler haben. Solche Lösungen heissen *primitive* pythagoräische Zahlentripel.

Bekannt ist die babylonische Tontafel mit dem Namen "Plimpton 322" aus der Zeit zwischen 1800 und 1650 v.u.Z., die an der Columbia University in New York aufbewahrt wird.

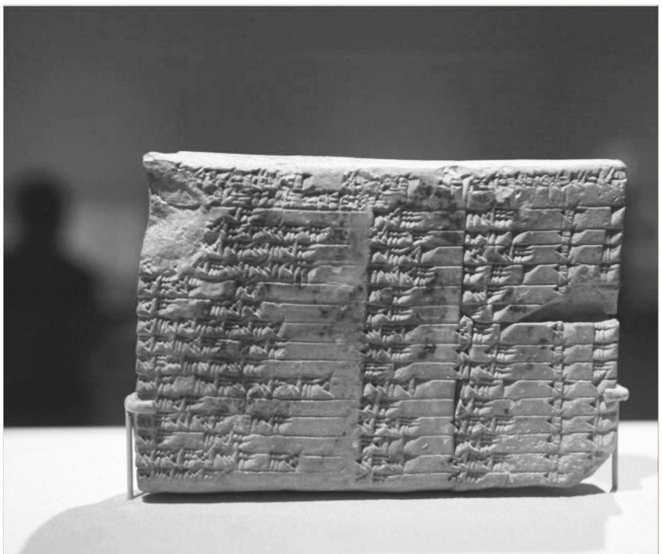

Abbildung 1: Plimpton 322. Ausgestellt an der Columbia University in New York.

Auf dieser Tafel findet man mehrere Zahlentripel. Darunter:

56	90	106
119	120	169
12 709	13 500	18 541

Anscheinend stand bereits den Babyloniern eine Methode zur Verfügung, um Lösungen der diophantischen Gleichung (1) zu finden. Nur ist nicht überliefert, wie sie auf diese Lösungen kamen.

2.1 Die Methode des Pythagoras

Es wird Pythagoras zugeschrieben, dass er sich Gleichung (1) widmete, indem er aufeinanderfolgende Quadratzahlen untersuchte. Vielleicht tatsächlich mittels folgender figurierter Zahlen:

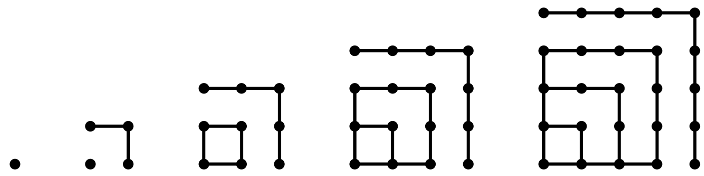

Abbildung 2: Figurierte Darstellung aufeinanderfolgender Quadratzahlen.

Man erkennt eine graphische Darstellung der binomischen Formel $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$ und der Tatsache, dass sich zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen um eine ungerade Zahl unterscheiden. Wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen selbst eine Quadratzahl ist, hat man eine Lösung der diophantischen Gleichung (1) gefunden. Sei also $y^2 = (2k+1)^2$ eine ungerade Quadratzahl, welche der Differenz der aufeinanderfolgenden Quadratzahlen x^2 und z^2 entspricht. Der Abbildung 2 entnimmt man dann, dass die Hälfte von $y^2 - 1$ gerade x ergibt. Das heisst

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2k+1)^2-1}{2} &&= 2k(k+1) \\ y &= && 2k+1 \\ z &= \frac{(2k+1)^2-1}{2} + 1 &&= 2k(k+1)+1 \end{aligned} \tag{2}$$

ist ein pythagoräisches Zahlentripel. Offensichtlich ist solch ein Tripel sogar primitiv ($\text{ggT}(x,z) = 1$). Pythagoras entdeckte damit, dass es unendlich viele primitive pythagoräische Zahlentripel gibt.

Die ersten pythagoräischen Zahlentripel, die man nach dieser Methode erhält, sind:

k	x	y	z
1	4	3	5
2	12	5	13
3	24	7	25

Tabelle 1: Die ersten pythagoräischen Zahlentripel nach Pythagoras.

Die gerade Zahl (also x) jedes Tripels in (2) und z unterscheiden sich um 1. Das Zahlentripel $(119, 120, 169)$ auf der babylonischen Tontafel wird mit der Methode des Pythagoras nicht entdeckt. Es existieren also noch mehr primitive pythagoräische Zahlentripel als diejenigen in (2). Allerdings sind alle pythagoräischen Tripel mit $z - x = 1$ in (2) enthalten.

2.2 Alle primitiven pythagoräischen Zahlentripel

Wie man alle pythagoräischen Zahlentripel findet, ist bereits bei Euklid im Buch X der Elemente beschrieben (siehe [1]). Eine etwas modernere Formulierung als bei Euklid lautet folgendermassen: Man wählt zwei teilerfremde natürliche Zahlen $m > n$, so dass $m + n$ ungerade ist. Dann liefert

$$x = m^2 - n^2\,, \quad y = 2mn\,, \quad z = m^2 + n^2 \tag{3}$$

ein primitives pythagoräisches Zahlentripel und alle primitiven Zahlentripel sind (bis auf Vertauschung von x und y) von dieser Form.

Es gibt algebraische und geometrische Herleitungen von (3). Eine algebraische Herleitung sei hier kurz skizziert: Aus $x^2 + y^2 = z^2$ folgt $y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$ und damit

$$\frac{y}{z-x} = \frac{z+x}{y} = t\,,$$

wobei t eine rationale Zahl ist. Eine Umformung liefert

$$\frac{y}{z} = t\left(1 - \frac{x}{z}\right) \quad \text{und} \quad 1 + \frac{x}{z} = \frac{y}{z}t$$

und damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} t\dfrac{x}{z} & + & \dfrac{y}{z} & = & t \\ -\dfrac{x}{z} & + & t\dfrac{y}{z} & = & 1 \end{array}$$

mit der Lösung

$$\frac{x}{z} = \frac{t^2-1}{t^2+1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{2t}{t^2+1}\,.$$

Mit $t = \frac{m}{n}$ ($\mathrm{ggT}(m, n) = 1$) ist jedes ganzzahlige Vielfache von

$$x = (m^2 - n^2)\,, \quad y = 2mn\,, \quad z = (m^2 + n^2)$$

ein pythagoräisches Zahlentripel. Wenn wir $m = k + 1$ und $n = k$ wählen, erhalten wir alle pythagoräischen Zahlentripel aus Abschnitt 2.1.

2.3 Näherungen für $\sqrt{2}$

Wir betrachten folgende speziellen Tripel:

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
5	2	21	20	29
12	5	119	120	169

Tabelle 2: Pythagoräische Zahlentripel mit $|x - y| = 1$.

Allen diesen Tripeln ist gemeinsam, dass $|x - y| = 1$ gilt. Diese Beispiele eignen sich gut, um Näherungen für $\sqrt{2}$ zu bestimmen. Man erhält aus diesen Zahlentripeln Folgen von oberen und unteren Schranken von $\sqrt{2}$:

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{5}{4} & < & \sqrt{2} & < & \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{29}{21} & < & \sqrt{2} & < & \dfrac{29}{20} \\ \dfrac{169}{120} & < & \sqrt{2} & < & \dfrac{169}{119} \end{array}$$

Wie kommt man aber auf die Werte für m und n in Tabelle 2, so dass $|x - y| = 1$ gilt?

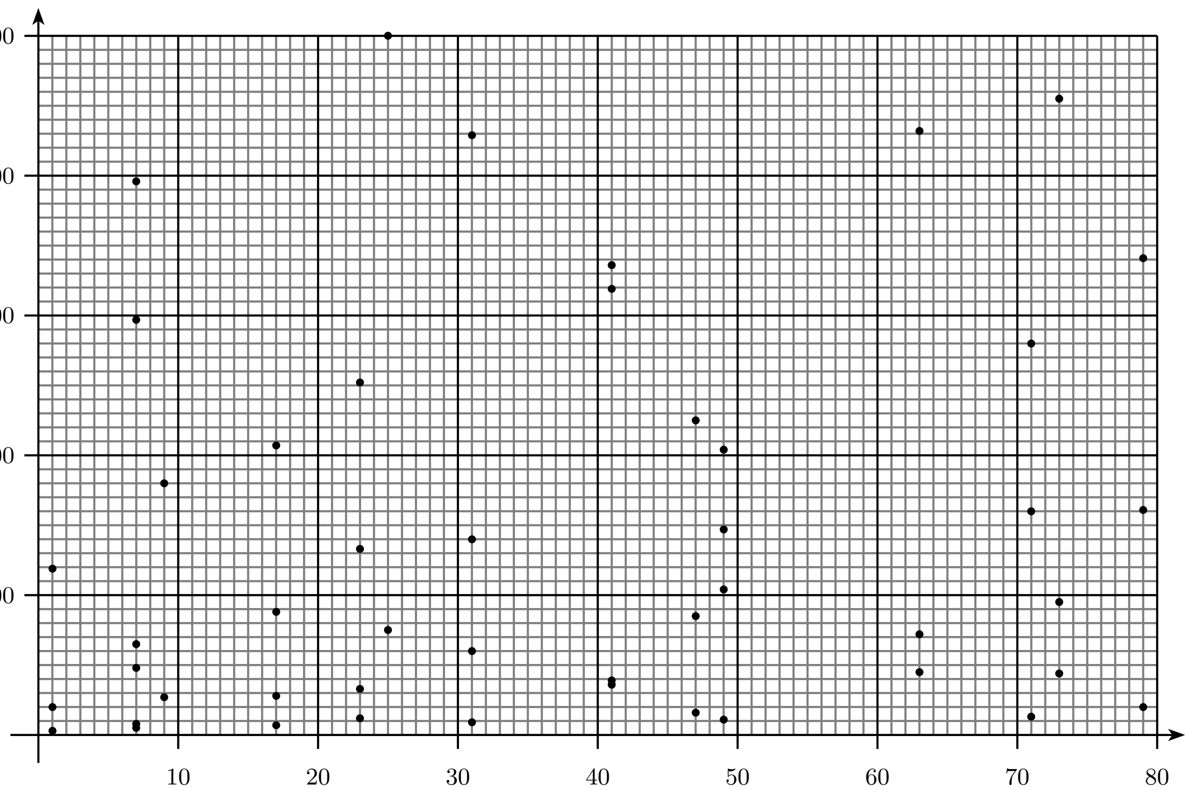

Abbildung 3: Pythagoräische Zahlentripel (x, y, z) geordnet nach $|x - y|$. Es wurde $\min(x, y)$ gegen $|x - y|$ aufgetragen.

3 Pythagoräische Zahlentripel und Pellsche Gleichung

Wir haben im vorherigen Abschnitt Tripel betrachtet, für die $|x - y| = 1$ galt. Welche Werte kann nun die Differenz $x - y$ annehmen? Mit der Darstellung der primitiven pythagoräischen Tripeln wie in (3) erhalten wir:

$$x - y = m^2 - n^2 - 2mn = (m - n)^2 - 2n^2 .$$

Eine diophantische Gleichung der Form

$$u^2 - dv^2 = a$$

mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{N}$ nennt man eine Pell-artige Gleichung bzw. eine Pellsche Gleichung, falls $a = 1$ ist. Es war Euler, der diese Gleichung wohl fälschlicherweise mit John Pell (1611 – 1685) in Verbindung brachte und als erster alle Lösungen dieser Gleichung mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ fand. Die Bedingung, $x - y = 1$ für pythagoräische Zahlentripel liefert die Pellsche Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = 1 \quad \text{mit} \quad u = m - n\,, \quad v = n\,.$$

Die Differenz $x - y$ kann nur dann $\pm a$ mit $a \in \mathbb{N}$ ergeben, wenn die Pell-artige Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = \pm a \tag{4}$$

eine Lösung hat. In Abbildung 3 ist $\min(x, y)$ gegen $|x - y|$ für die pythagoräischen Zahlentripel dargestellt. Man erkennt, dass die Pell-artige Gleichung (4) z.B. keine Lösung für $a = 3$ oder $a = 5$ hat.

Zusammenfassend: Die Suche nach pythagoräischen Zahlentripeln (x, y, z), für welche $x - y = 1$ gilt, führt uns also auf eine Pellsche Gleichung, die mit Hilfe des Kettenbruchs

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

gelöst werden kann. Der Fall $x - y = -1$ ist allerdings gesondert zu behandeln.

Dieses Vorgehen, um systematisch alle pythagoräischen Tripel zu finden, für welche sich die beiden kleineren Zahlen nur um 1 unterscheiden, ist für den gymnasialen Unterricht kaum geeignet. Wir verfolgen hier deshalb ein alternatives Vorgehen, das für den Unterricht eher geeignet ist: Wenn $x = m^2 - n^2$ und $y = 2mn$ zu einem pythagoräischen Zahlentripel gehören, mit $|x - y| = 1$ dann sind also x und y "fast" gleich und damit ist

$$\frac{m^2 - n^2}{2mn} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n} - \frac{1}{\frac{m}{n}}\right)$$

"fast" gleich 1. Wir untersuchen deshalb die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) = 1\,.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$s_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,.$$

Hier interessiert uns nur die positive Lösung $s = 1 + \sqrt{2}$. Die Kettenbruchentwicklung dieser Zahl lautet:

$$s = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}$$

Es handelt sich hier um einen unendlichen Kettenbruch. Wir verwenden die übliche Notation für einen Kettenbruch mit Hilfe von eckigen Klammern:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$$

Man nennt die Zahl $C_i = [a_0; a_1, \ldots, a_i]$ die i-te Konvergente des Kettenbruchs. Für unseren obigen Kettenbruch von s gilt z.B. $C_0 = 2$, $C_1 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, etc.

Die i-te Konvergente ist eine Näherung des Kettenbruchs, die sich auch als gekürzter Bruch $C_i = \frac{p_i}{q_i}$ darstellen lässt. Mit Hilfe eines Induktionsbeweises kann man zeigen, dass sich diese Zähler und Nenner rekursiv folgendermassen berechnen lassen:

$$p_i = a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \quad \text{bzw.} \quad q_i = a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2}\,; \quad p_{-2} = 0\,, \quad p_{-1} = 1\,, \quad q_{-2} = 1\,, \quad p_{-1} = 0\,.$$

Für die Lernenden ist es oft hilfreich, Zähler und Nenner der Konvergenten zu berechnen, indem sie folgende Tabelle nach den obigen Rekursionsregeln ausfüllen:

i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	2	2	2	2	2
p_i	0	1	2	5	12	29	70	169
q_i	1	0	1	2	5	12	29	70

Für unseren unendlichen Kettenbruch von $1 + \sqrt{2}$ erhält man folgende Rekursionsformel für Zähler und Nenner der Konvergenten:

$$p_i = 2p_{i-1} + p_{i-2}\,; \quad p_0 = 2, p_1 = 5$$

und $q_i = p_{i-1}$ für $i > 0$ und $q_0 = 1$. Bei der Folge $0, 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$ handelt es sich um die sogenannte Pell-Folge. Eine Analogie zur Fibonacci-Folge ist offensichtlich. Der Grenzwert zweier aufeinanderfolgender Pell-Zahlen ist

$$\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{p_{i-1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i} = 1 + \sqrt{2}$$

also wieder die positive Lösung unserer quadratischen Gleichung. Diese Zahl ist auch unter dem Namen "silberner Schnitt" bekannt (siehe z.B. [4]). Enstprechend kann man auch eine explizite Darstellung der Pell-Zahlen angeben. Eine schöne Herleitung der Formel von Binet, die für den gymnasialen Unterricht durchaus geeignet ist, habe ich von Peter Gallin gelernt [2]. Diese Methode lässt sich analog auf die Pell-Zahlen und den silbernen Schnitt übertragen und man erhält

$$p_i = \frac{(1+\sqrt{2})^{i+2} - (1-\sqrt{2})^{i+2}}{2\sqrt{2}}\,.$$

Wir nutzen nun die Eigenschaften der Konvergenten eines Kettenbruchs. Die Konvergenten des Kettenbruchs einer irrationalen Zahl stellen "beste" Näherungen der Zahl dar und damit sind p_i und q_i die gesuchten Kandidaten für m und n, um daraus pythagoräische Zahlentripel zu berechnen, für welche $|x-y| = 1$ gilt. Wir können also unsere Tabelle 2 beliebig fortsetzen:

m	n	x	y	z
2	1	3	4	5
5	2	21	20	29
12	5	119	120	169
29	12	697	696	985
70	29	4059	4060	5741
169	70	23661	23660	33461
408	169	137903	137904	195025

Tabelle 3: Die ersten pythagoräischen Zahlentripel mit $|x-y| = 1$ erzeugt mit Hilfe der Pell-Zahlen.

Tatsächlich kommt man auf das gleiche Resultat wie in Tabelle 3, indem man die Pellsche bzw. Pell-artige Gleichung

$$u^2 - 2v^2 = \pm 1$$

löst.

4 Weitere Resultate

Zuletzt sei noch erwähnt, dass pythagoräische Zahlentripel, obwohl sie seit tausenden von Jahren bekannt sind, einige Schätze in sich bergen, die erst in jüngster Zeit entdeckt wurden. Eine etwas überraschende Beobachtung stammt von D.N. Lehmer (siehe [3] auf Seite 328):

Satz 4.1. *Es bezeichne $\alpha(n)$ die Anzahl primitiver pythagoräischer Tripel mit $c < n$. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi\alpha(n)}{n} = 1$$

Es bezeichne $\beta(n)$ die Anzahl primitiver pythagoräischer Tripel mit $(a+b+c) < n$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi^2\beta(n)}{n\log 2} = 1$$

Literatur

[1] Euklid. Die Elemente. Buch X, § 28a.

[2] Peter Gallin. Die Wiedergeburt der Fibonacci-Zahlen. *Bulletin des VSMP*, 105:20, 2007.

[3] D.N. Lehmer. Asymptotic evaluation of certain totient sums. *Am. J. Math.*, 22:293–335, 1990.

[4] Hans Walser. *DIN A4 in Raum und Zeit, Silbernes Rechteck – Goldenes Trapez – DIN-Quader*. Edition am Gutenbergplatz, Leipzig, 2013.