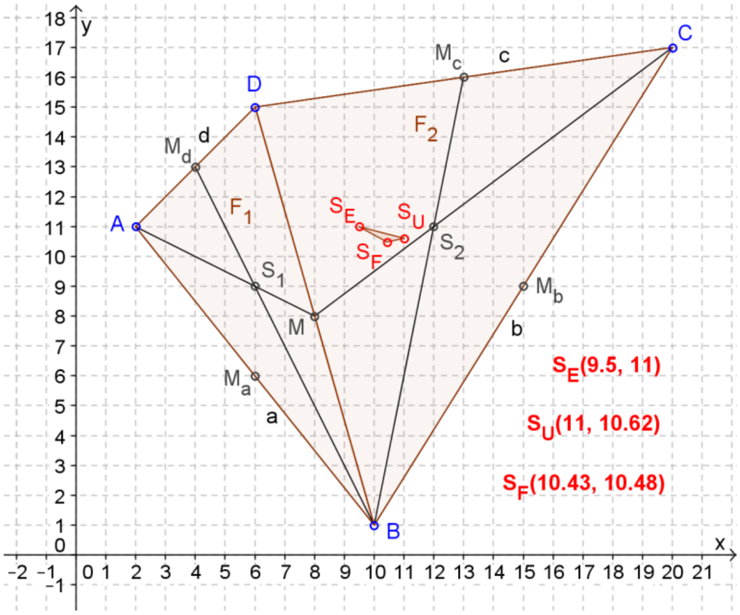
Schwerpunkt – von was?

Hans Ulrich Keller, MNG Zürich

"Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 1:2". Das sagt sich so leicht, aber was ist eigentlich mit dem Wort "Schwerpunkt" gemeint?
Zur Illustration sollen hier mit Hilfe des Programms "GeoGebra" der Schwerpunkt S_E der **Ecken**, der Schwerpunkt S_U des **Umfangs** und der Schwerpunkt S_F der **Fläche** des gleichen Vierecks dargestellt werden. Es zeigt sich sozusagen graphisch, dass diese drei Punkte alle voneinander verschieden sind! Es muss deshalb zwischen diesen drei Punkten unterschieden werden. Werden die Eckpunkte so gewählt, dass das Viereck ABCD eine einspringende Ecke hat, ist es sogar möglich, dass alle diese drei Schwerpunkte ausserhalb des Vierecks liegen!



Der Schwerpunkt von Massenpunkten $S(x_S, y_S)$ berechnet sich bekanntlich wie folgt:

$$x_S = \frac{\sum_k m_k x_k}{\sum_k m_k}; y_S = \frac{\sum_k m_k y_k}{\sum_k m_k}$$

Nehmen wir an, dass in allen Ecken ein Massenpunkt der Masse 1 gegeben ist, ergibt sich für das links dargestellte Viereck mit den Ecken A(2/11), B(10/1), C(20/17) und D(6/15) der **Schwerpunkt der Ecken S_E(9.5/11.0).**

Für den Schwerpunkt des Umfangs kann angenommen werden, dass sich die ganze Masse jeder Seite in der jeweiligen Seitenmitte befinden würde. Die Masse einer Seite ist dabei natürlich proportional zu ihrer Länge. Damit wird der **Schwerpunkt des Umfanges** (angenähert) **S_U(11.0025/10.6164).**

Der Schwerpunkt der Fläche könnte mit Integralrechnung berechnet werden. Es geht aber auch mit elementargeometrischen Mitteln: Wir teilen das Viereck durch die Diagonale BD in zwei Dreiecke mit Flächeninhalt F_1 resp. F_2 auf. Die Schwerpunkte dieser beiden Dreiecksflächen sind die Flächenschwerpunkte S_1 respektive S_2 der Dreiecke, die sich im jeweiligen Schnittpunkt der Schwerlinien befinden; die zugehörigen Massen entsprechen den Flächeninhalten dieser Dreiecke, die z. B. mit der Heron–Formel oder mit passenden rechtwinkligen Trapezen berechnet werden können. Es darf gerechnet werden, wie wenn die gesamte Masse jeder Fläche in ihrem jeweiligen Schwerpunkt konzentriert wäre. Mit $F_1 = 36$ und $F_2 = 102$ und $S_1(6/9)$ resp.$S_2(12/11)$ ergibt die Rechnung für den **Schwerpunkt der Fläche** (angenähert) **S_F(10.4348/10.4783).**

Wie man leicht zeigt, stimmt bei jedem **Dreieck** wenigstens der Schwerpunkt der Ecken mit dem Schwerpunkt der Fläche überein. Der Schwerpunkt des Umfanges hingegen stimmt im Allgemeinen bereits nicht mehr mit dem Schwerpunkt der Fläche überein. Die Beweise dafür dürfen dem Leser überlassen werden.