Lucky Seven
- die Mathematik hinter dem Spiel

Armin P. Barth

Kürzlich schenkte mir Joyce, eine gute Freundin aus England, ein Exemplar des Spiels *Lucky Seven*. Sie wollte sofort spielen und mich schlagen, und ganz unerwartet gab mir ihre Gewinnsucht Gelegenheit, ihr gegenüber die Vorzüge der Mathematik zu erläutern – und immer wieder den Satz „*It's your choice, Joyce*" zu sagen.

A fast, addictive game you won't want to put down, versprach die Hülle des Spiels. Und so wird es gespielt: Man spielt mit sieben Karten, die auf der Vorderseite mit den Zahlen 1 – 7 bedruckt und auf der Rückseite einheitlich mit der Aufschrift LS (Lucky Seven) versehen sind. Die Regeln verlangten, dass Joyce die Karten mischte, um sie dann verdeckt in einer Reihe vor sich auszulegen. Gleichzeitig musste vereinbart werden, welche dieser Karten an Position 1 (üblicherweise linker Anfang der Reihe) und welche an Position 7 (rechtes Ende der Reihe) liegt.

LS	LS	LS	LS	LS	LS	LS
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

Nun wählte Joyce eine beliebige Karte aus und drehte sie um:

LS	LS	LS	LS	2	LS	LS
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

Die „2" bedeutete, dass sie als nächstes die Karte an Position 2 umzudrehen hatte:

LS	7	LS	LS	2	LS	LS
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

Die „7" verwies auf Position 7. Folglich musste nun die dort platzierte Karte umgedreht werden:

LS	7	LS	LS	2	LS	5
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

Die neue Karte verwies auf Platz 5. Da die dort platzierte Karte aber schon umgedreht worden war, war Joyce's Durchgang zu Ende, was sie überaus ärgerte, denn ein Siegespunkt wäre für sie nur notiert worden, wenn es ihr gelungen wäre, *alle* Karten umzudrehen. *Now it was my turn*.

Es stellte sich heraus, dass im Laufe der nächsten zehn Durchgänge weder Joyce noch ich einen Siegespunkt verbuchen konnte. *Joyce was not amused*!. Aber schon bald wich die Enttäuschung neugierigen Fragen, und wenn es überhaupt einen Weg hin zu Antworten gab, so führte dieser durch Ländereien der Mathematik.

Kann man dieses Spiel überhaupt gewinnen?

Zu denken, ein Spiel, das zehnmal hintereinander nie gewonnen wurde, könne prinzipiell nicht gewonnen werden, wäre ja eine durchaus geschickte Verarbeitung von Enttäuschung. Aber es ist natürlich falsch. Joyce äusserte schon bald folgende Idee: Sie hatte beobachtet, dass manchmal das Spiel bereits mit der ersten Karte zu Ende war, als nämlich deren Zahl ihrer eigenen Position entsprach. Folglich, meinte sie, müsse eine Kartenreihe dann zum Sieg führen, wenn an keiner einzigen Position die Karte liegt, deren Zahl mit der eigenen Position übereinstimmt. Ich bildete die folgende Reihe, in der diese Eigenschaft zweifellos erfüllt war, und sagte: „*It's your choice, Joyce.*“

5	1	4	6	7	3	2
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

(*)

Wo auch immer sie anfing, nach drei oder vier Schritten war das Spiel zu Ende. Manch einer wäre durch eine solche Falsifizierung einer Idee entmutigt worden. Nicht so Joyce; sie schob Karten hin und her und wartete bald mit dieser neuen Reihe auf:

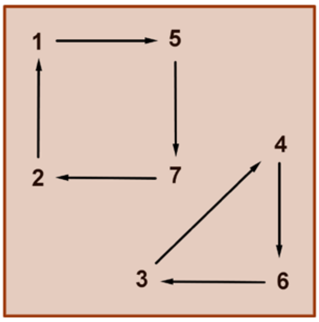
5	1	4	6	7	2	3
Pos. 1	Pos. 2	Pos. 3	Pos. 4	Pos. 5	Pos. 6	Pos. 7

(**)

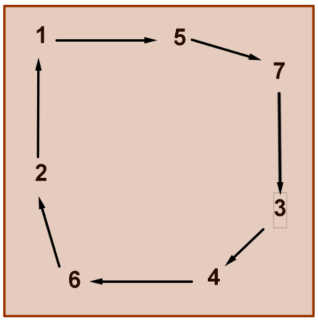
Egal, wo man einsteigt, das ist einer Siegerreihe. Okay, es geht also doch. Man kann gewinnen, aber ein Sieg scheint extrem selten zu sein. Oder doch nicht?

Permutationen und Zykel

Ich erklärte Joyce, was Permutationen sind. Die oben abgebildeten Kartenreihen (*) und (**) sind ja nichts anderes als Permutationen der Zahlen 1 – 7. Ich zeichnete beide auf:



(*)



(**)

Mathematiker würden für (**) den Ausdruck $(1\ \ 5\ \ 7\ \ 3\ \ 4\ \ 6\ \ 2)$ verwenden und ihn so verstehen, dass 1 auf 5 und 5 auf 7 und 7 auf 3 und 3 auf 4 und 4 auf 6 und 6 auf 2 und 2 auf 1 abgebildet wird. Diese Permutation besteht also aus einem einzigen Zykel. Für die Kartenreihe (*) würden sie den Ausdruck $(1\ \ 5\ \ 7\ \ 2)(3\ \ 4\ \ 6)$ notieren. Er macht deutlich, dass die Permutation aus zwei Zykeln besteht, und dass es keine Möglichkeit gibt, den Zykel, in den man hineingeraten ist, zu verlassen. Joyce dämmerte es: Bei Lucky Seven stellt jede Kartenreihe eine Permutation der Zahlen 1 – 7 dar. Soll eine Kartenreihe zum Erfolg führen, so darf sie nicht aus ≥ 2 Zykeln bestehen.

Lucky One, Lucky Two, Lucky Three

Joyce drängte darauf herauszufinden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass man bei einem Durchgang einen Siegespunkt holt. Ich schlug vor, wir könnten ein paar Spezialfälle betrachten. Mathematische Probleme können ja oft dadurch gelöst werden, dass sie zuerst künstlich verkleinert oder dass Spezialfälle untersucht werden.

	$n =$	Anzahl Perm.	davon günstig	Gewinnchance
Lucky One	1	$1! = 1$	1	$1/1$
Lucky Two	2	$2! = 2$	1	$1/2$
Lucky Three	3	$3! = 6$	2	$1/3$

Lucky One ist nicht der Rede wert. Die einzige Karte mit dem Aufdruck „1" liegt an Position 1; indem man sie „auswählt" und umdreht, gewinnt man. Bei Lucky Two gibt es nur zwei mögliche Startkonstellationen:

$$(1 \quad 2) \quad \text{und} \quad (1)(2).$$

Die Notation $(1 \quad 2)$ zeigt uns, dass 1 auf 2 und 2 auf 1 abgebildet wird, genauer, dass die Karte an Position 1 auf Position 2 verweist (also den Aufdruck „2" hat) und die Karte an Position 2 auf Position 1 zeigt (also den Aufdruck „1" hat). Eine solche Permutation nennt man auch *Zykel der Länge* 2. Die Notation $(1)(2)$ enthält zwei Zykel der Länge 1. 1 wird auf sich selber, und 2 wird auf sich selber abgebildet. Während die Reihe links eine Gewinnkonstellation ist, führt die andere zum Verlust. Die Wahrscheinlichkeit, Lucky Two zu gewinnen, ist also 1/2.

Bei Lucky Three gibt es sechs mögliche Startkonstellationen:

$$(1 \quad 2 \quad 3)\ ,\ (1 \quad 3 \quad 2)\ ,\ (1)(2 \quad 3)\ ,\ (2)(1 \quad 3)\ ,\ (3)(1 \quad 2)\ ,\ (1)(2)(3).$$

Die zweite von rechts etwa hat einen Zykel der Länge 1, weil an Position 3 die Karte mit Aufdruck „3" liegt, und einen Zykel der Länge 2, weil die Karte an Position 1 auf Position 2 verweist und umgekehrt. Egal, wo man anfängt, das Spiel ist nach einem oder zwei Schritten zu Ende. Gewinnen kann man nicht. In der Tat sind von den sechs möglichen Konstellationen nur die beiden ersten günstig, die je aus genau einem Zykel bestehen, so dass also eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/3 besteht. Ein Muster zeichnet sich ab: 1/1, 1/2, 1/3. Wie gross wird wohl die Gewinnwahrscheinlichkeit bei sieben Karten sein?

Joyce durchschaut Lucky Seven

Joyce wurde mutiger und hielt mir nun einen Vortrag: Im Extremfall handelt man sich beim Auslegen der sieben Karten sieben Zykel ein:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7).$$

Es gibt offenbar nur eine Möglichkeit, dies zu erreichen, indem man an Position i die Karte mit der Aufschrift „i" platziert ($i = 1,2,...,7$). (Zugegeben: Die i–Notation stammt von mir.) Für genau sechs Zykel gibt es schon viel mehr Möglichkeiten, und es ist nicht sofort klar, wie viele das sind:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6 \quad 7)\ ,\ (1)(2)(3)(4)(5 \quad 6)(7)\ ,\ (1)(2)(3 \quad 7)(4)(5)(6),\ \text{usw.}$$

Aber sie sind alle nicht günstig im Hinblick auf einen Sieg. Auch die entsprechenden Anzahlen von Permutationen mit 5, 4, 3 oder 2 Zykeln sind nicht offensichtlich. Und auch sie sind uns alle nicht willkommen. Und ohnehin wären wir an ihnen im Moment nur dann interessiert, wenn sie es gestatten würden auszurechnen, wie viele Permutationen aus genau einem Zykel bestehen, denn das sind ja die Siegerkonstellationen. Wie viele Permutationen der Zahlen 1 – 7 bestehen also aus genau einem Zykel der Länge 7? Das war die Frage aller Fragen.

Stirling-Zahlen

Ich machte Joyce auf ihren 1770 verstorbenen Landsmann James Stirling aufmerksam, der sich der Berechnung solcher Anzahlen gewidmet hat. Bezeichnet man mit $s_{n,k}$ oder $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ die Anzahl Permutationen der Zahlen aus $\{1, 2, ..., n\}$, die aus genau k Zykeln aufgebaut sind, so kann man unsere vielen Fragen und spärlichen Antworten wie folgt notieren:

- $s_{7,7} = 1$ oder allgemein: $s_{n,n} = 1$.
- $s_{7,0} = 0$ oder allgemein: $s_{n,0} = 0$.
- $s_{7,1}$ ist die für uns brennend interessante Anzahl günstiger Kartenkonstellationen.
- $P = s_{7,1} / 7!$ ist die Wahrscheinlichkeit, eine Siegeskonstellation zu legen.
- $s_{7,6}$, $s_{7,5}$, $s_{7,4}$, $s_{7,3}$, $s_{7,2}$ kennen wir alle (auch noch) nicht.
- Die sogenannte *Karamata-Notation* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ erlaubt, durch die Rekursionsformel $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ eine verblüffende Analogie zu den Binomialkoeffizienten herzustellen, aber dies wäre für Joyce natürlich Kauderwelsch gewesen.

Die Zahlen $s_{n,k}$ heissen *Stirling-Zahlen erster Art*.

Die von Joyce so dringend gesuchte Zahl $s_{7,1}$ ist leicht zu finden. Wir müssen bloss konstruktiv denken und uns fragen, auf wie viele Arten wir den einen Zykel der Länge 7 mit Zahlen füllen können. Zunächst einmal ist es egal, mit welcher Zahl wir die erste Stelle des Zykels besetzen, da zum Beispiel

$$(1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7) = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 1) = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 1 \quad 2) = \ldots$$

alle dieselbe Permutation bedeuten, einfach zyklisch vertauscht.

Ist die erste Zahl einmal gewählt, haben wir sechs Möglichkeiten zur Besetzung der zweiten Stelle, dann fünf für die dritte und so weiter. Insgesamt gibt es also $6!$ günstige Permutationen. Und daher ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gleich $P = 6!/7! = 1/7$. Der Schritt zu Lucky n ist nun ein winziger. Von $n!$ möglichen Kartenreihen sind $(n-1)!$ günstig. Es ist also $s_{n,1} = (n-1)!$, und die Wahrscheinlichkeit, bei einem Spieldurchgang einen Punkt zu holen, ist

$$P = (n-1)!/n! = 1/n.$$

Joyce wurde klar, dass das Spiel nicht besonders spannend ist; es ist ja keinerlei strategisches Manipulieren möglich. Ist die Kartenreihe einmal ausgelegt, ist es egal, wo man einsteigt. Man steigt einfach in einen Zykel ein und wird ein bisschen herumgewirbelt, und in durchschnittlich einem von sieben Versuchen hat man das Glück, in einem Zykel der Länge 7 zu stecken. Der grosse Gewinn des Spielens war also nicht die Faszination der spielerischen Möglichkeiten, sondern die Faszination der mathematischen Analyse.

Dem brasilianischen Mathematiker Paulo Ribenboim verdanken wir den Ausdruck „Les nombres, des amis qui nous donnes des problèmes.“ In meinem Fall war Joyce diese „amie“, die mir ein Problem geschenkt hat.