René Fehlmann
rene.fehlmann@phbern.ch

# Ewiger Quadrupel-Lauf in der Sekantenmethode

## 1 Einleitung

Das Newton-Raphson Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen einer (differenzierbaren) Funktion $f$ liefert keine Lösung, wenn die berechnete Folge von Näherungswerten der Nullstelle

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

einen Wert $x_{n+1}$ ergibt, welcher Nullstelle der Ableitung von $f$ ist. Das Verfahren konvergiert aber auch in anderen Fällen nicht, zum Beispiel im Falle der Sinusfunktion mit Startwert $x_0 = -\arctan(\pi)$. Hier erhält man $x_n = x_0 + n \cdot \pi$. Andere Fälle, bei denen das Verfahren nicht konvergiert, sind ewige Paarläufe wie in Abbildung 1 dargestellt. Bei Hans Walser [1] findet man zahlreiche weitere Beispiele, die auf einen ewigen Paarlauf führen.

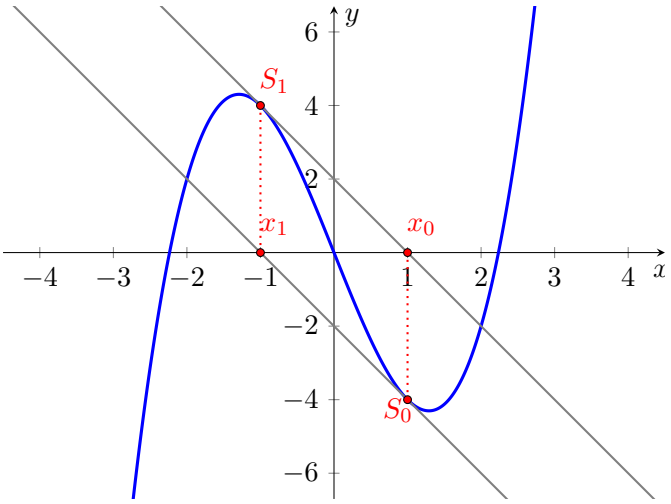


**Abbildung 1:** Ewiger Paarlauf für $f(x) = x^3 - 5x$ mit Startwert $x_0 = 1$.

Das Sekantenverfahren ist verwandt mit dem Newtonverfahren, die Ableitung der Funktion wird durch einen Differenzenquotienten ersetzt. Man erhält folgende rekursiv definierte Zahlenfolge:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \tag{2}$$

Geometrisch bedeutet das Verfahren, dass für zwei Werte $x_{n-1}$ und $x_n$ die Sekante durch die Punkte $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ und $(x_n, f(x_n))$ gelegt wird und der Schnittpunkt mit der $x$-Achse den nächsten Wert $x_{n+1}$ liefert. Natürlich versagt auch dieses Verfahren, wenn ein Wert $x_{n+1}$ berechnet wird, für den $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ gilt. In diesem Beitrag untersuchen wir, für welche Startwerte das Sekantenverfahren einen ewigen Quadrupel-Lauf liefert.

## 2 Bedingungen für einen ewigen Quadrupel-Lauf

Wir beschränken uns auf den Fall einer kubische Funktion der Form $f(x) = x^3 - ax$ mit $a > 0$. Abbildung 2 illustriert die Situation. Das Verfahren liefert einen ewigen Quadrupel-Lauf, falls $x_2 = -x_0$ und $x_3 = -x_1$.

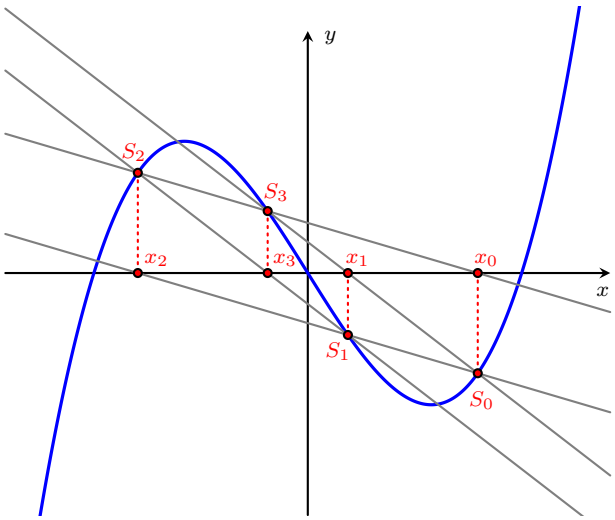


**Abbildung 2:** Ewiger Quadrupel-Lauf für $f(x) = x^3 - ax$.

Bevor wir diese beiden Bedingungen in Gleichung (2) einsetzen, formen wir die Rekursionsgleichung noch etwas um und erhalten

$$x_{n+1} \cdot f(x_n) - x_{n+1} \cdot f(x_{n-1}) + x_n \cdot f(x_{n-1}) - x_{n-1} \cdot f(x_n) = 0\,.$$

Wir setzen $x = x_1 = -x_3$ und $y = x_2 = -x_4$ oben ein und haben damit folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x+y)\cdot f(x) - 2x \cdot f(y) & = & 0 \\ (y-x)\cdot f(y) - 2y \cdot f(-x) & = & 0 \end{array}\right. \tag{3}$$

Für die kubische Funktion $f(x) = x^3 - ax$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x+y)\cdot (x^3-ax) - 2x \cdot (y^3-ay) & = & 0 \\ (y-x)\cdot (y^3-ay) + 2y \cdot (x^3-ax) & = & 0 \end{array}\right. \tag{4}$$

Das Gleichungssystem (4) hat die triviale Lösung $x = 0$ und $y = 0$. An dieser Lösung sind wir nicht interessiert. Wir haben also noch zu lösen

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x+y)\cdot (x^2-a) - 2\cdot (y^3-ay) & = & 0 \\ (y-x)\cdot (y^2-a) + 2\cdot (x^3-ax) & = & 0 \end{array}\right. .$$

Etwas weniger offensichtlich ist, dass sich beide Gleichungen weiter faktorisieren lassen. Wir multiplizieren zuerst aus:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - ax + x^2y - 2y^3 + ay & = & 0 \\ y^3 - ay - xy^2 + 2x^3 - ax & = & 0 \end{array}\right.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass tatsächlich

$$\begin{array}{rcl} x^3 - ax + x^2y - 2y^3 + ay & = & (x-y)(x^2+2y^2+2xy-a) \\ y^3 - ay - xy^2 + 2x^3 - ax & = & (x+y)(y^2+2x^2-2xy-a) \end{array} .$$

Wieder sind wir in den Lösungen $x = y$ und $x = -y$ nicht interessiert. Der erste Fall entspricht der Situation zweier identischer Startwerte, der zweite Fall führt auf $x_2 = x_3$, also wieder auf ein Versagen des Verfahrens. Unser Gleichungssystem hat sich nun auf zwei Ellipsengleichungen reduziert:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x^2 & + & 2y^2 & + & 2xy & = & a \\ 2x^2 & + & y^2 & - & 2xy & = & a \end{array}\right. \tag{5}$$

Wenn wir in der ersten Ellipsengleichung $x \to y$ und $y \to -x$ ersetzen, erhalten wir die zweite Gleichung. Die Hauptachsen der beiden Ellipsen stehen also senkrecht aufeinander. Die Situation ist

in Abbildung 3 gezeigt. Das Gleichungssystem (5) hat vier Lösungen. Diese Lösungen entsprechen innerhalb des Sekantenverfahrens lediglich einer zyklischen Vertauschung der Werte $x_0$, $x_1$, $x_2$ und $x_3$.

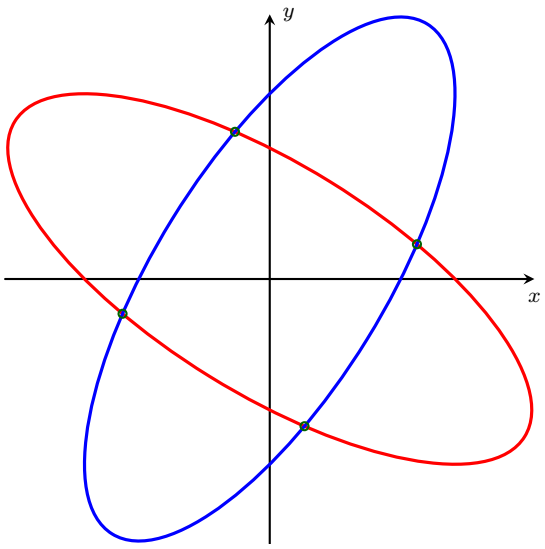


**Abbildung 3:** Schnittpunkte der beiden Ellipsengleichungen des Systems (5).

Um einen der Schnittpunkte der beiden Ellipsen zu berechnen, führen wir eine Hauptachsentransformation der ersten Gleichung in (5) durch. Es ist

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir diagonalisieren die Matrix $M$. Die Eigenwerte sind die Lösungen von

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

und die normierten Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+1} \\ -\sqrt{\sqrt{5}-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5}-1} \\ \sqrt{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{5}+1} & \sqrt{\sqrt{5}-1} \\ -\sqrt{\sqrt{5}-1} & \sqrt{\sqrt{5}+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \tag{6}$$

in die Gleichungen (5) ein und erhalten

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\xi}{\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\eta}{\beta}\right)^2 = 1 \\ \left(\dfrac{\xi}{\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\eta}{\alpha}\right)^2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{5}-5}} \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}a}{3\sqrt{5}+5}}.$$

Das Gleichungssystem (7) hat die positive Lösung

$$\xi = \eta = \frac{\alpha \cdot \beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sqrt{\frac{a}{3}}\,.$$

Indem wir den Wert in Gleichung (6) einsetzen, lassen sich die Startwerte berechnen, die einen ewigen Quadrupel-Lauf erzeugen:

$$\begin{aligned} x_0 = x &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}\left(\sqrt{\sqrt{5}+1}+\sqrt{\sqrt{5}-1}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{a} \\ x_1 = y &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-1}+\sqrt{\sqrt{5}+1}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{a}\,. \end{aligned}$$

Unabhängig vom Wert von $a > 0$ gilt für das Verhältnis der beiden Startwerte:

$$\frac{x_0}{x_1} = \sqrt{5}+2 = 4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}\,.$$

Die Zahl vier spielt also auch in der Lösung des ewigen Quadrupel-Laufs eine prominente Rolle.

## Links

[1] Hans Walser: *Ewige Paarläufe*, https://walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/N/Newton/Newton.pdf.