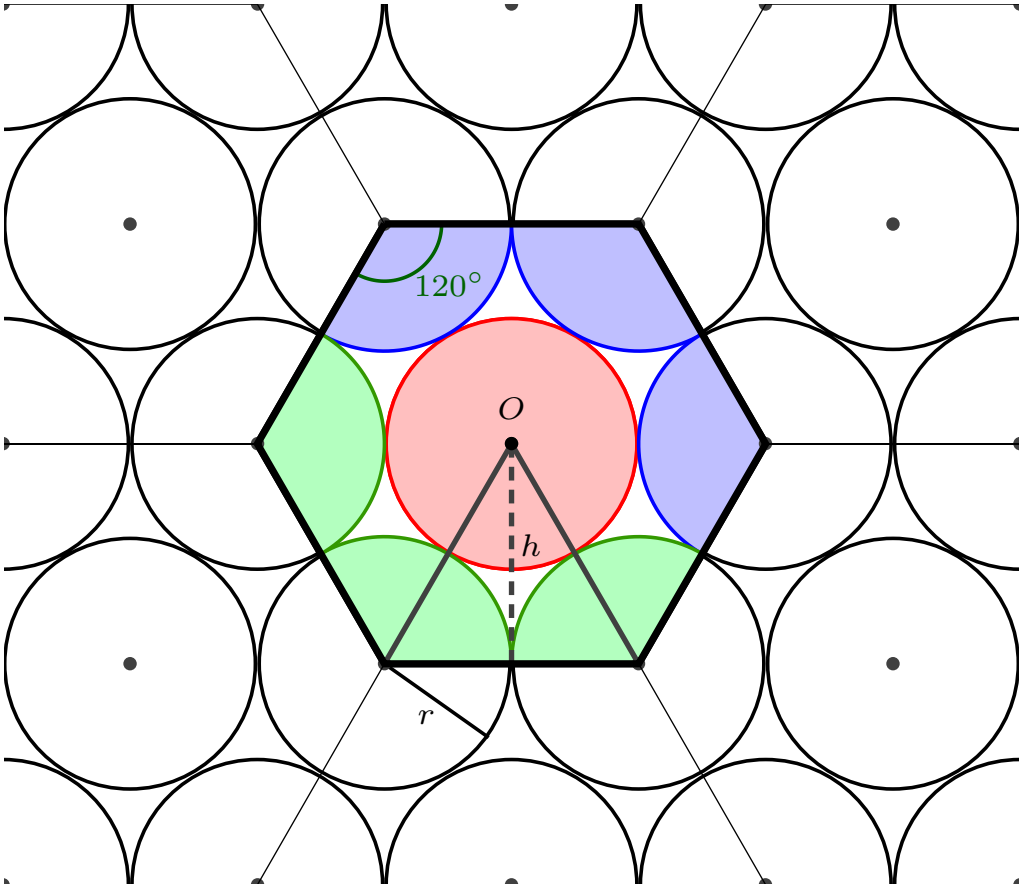
Bulletin

September 2015 — Septembre 2015 N° 129

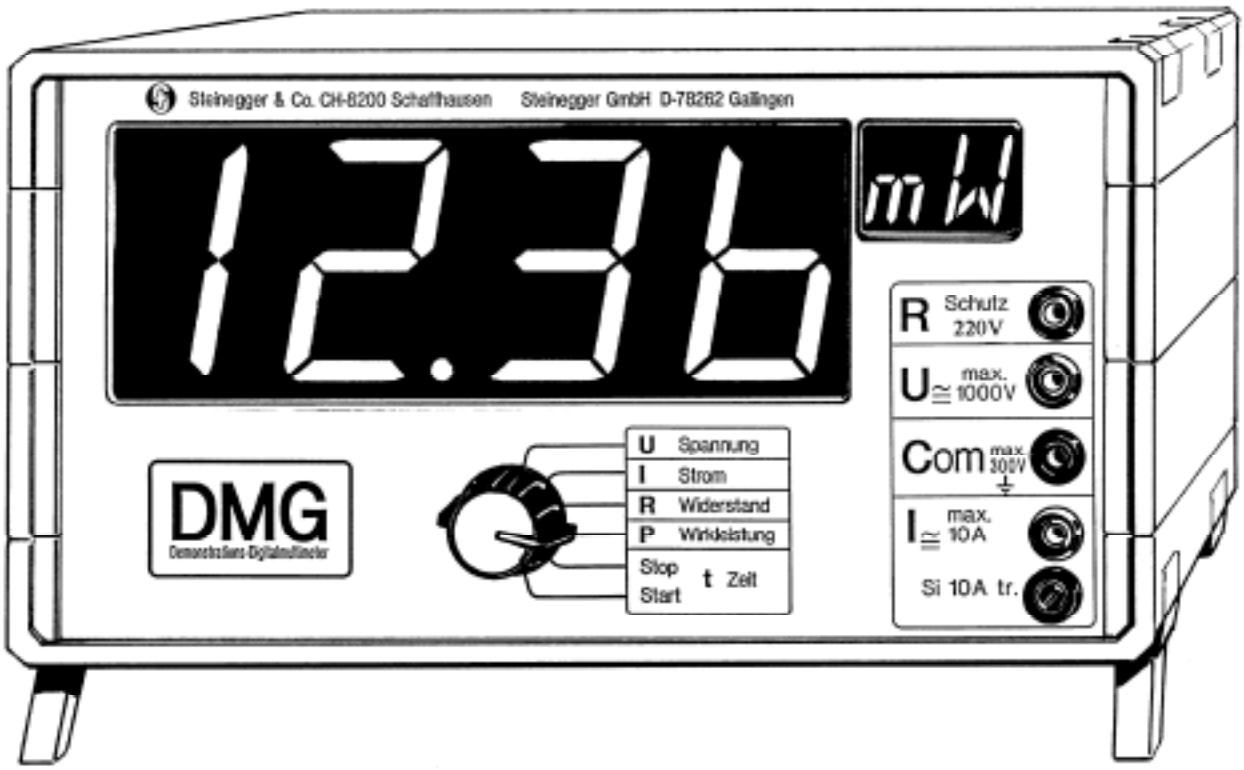


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DMG

Art. Nr. 150



Das vollautomatische Digitalmessgerät für Schulen; kompromisslose Qualität zu erstaunlich günstigem Preis!

- **Misst:** **Gleich- und Wechselspannung (echt eff.)** **0.1 mV - 1000 V≅**
  Gleich- und Wechselströme (echt eff.) **1 µA - 10 A≅**
  Widerstände **0.1 Ω - 20 MΩ**
  Wirkleistung (!) **1 µW - 10 kW**
  Zeit (Stoppuhr) **0.01 s - 2'000 s**
- **56 mm hohe Ziffernanzeige - bis auf 25 m Distanz ablesbar**
- **2'000 Messpunkte und integrierte 20 mm hohe Einheitenanzeige**
- **Vollautomatische Bereichswahl und raffinierte Einknopfbedienung**
- **Ausbau durch verschiedene Zusatzmodule**
- **Viele Zusatzgeräte direkt anschließbar**
- **Bestmöglicher Schutz in allen Bereichen**
- **Attraktiver Preis: SFr 905.- (inkl. MWSt)**

Die kostenlose "Kurzbeschreibung DMG" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
CH-8200 Schaffhausen

☎ : **052-625 58 90**
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

VSMP – SSPMP – SSIMF **2**

Einladung zur Generalversammlung 2015
Invitation à l'assemblée générale 2015 2

Deutschschweizerische Mathematikkommission **4**

Herbert Bruderer
Überraschende Funde zur Rechenmaschine Curta 4

Herbert Bruderer
Meilensteine der Rechentechnik 7

Urs Kirchgraber
Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pohl 10

ETH Zürich: Kolloquium über Mathematik, Unterricht und Informatik – Programm HS 2015 20

Deutschschweizerische Physikkommission **24**

Martin Lieberherr
Seilreibung 24

Samuel Byland
IYPT 2015 & SYPT 2016 26

Eric Schertenleib
Fire Hose 28

ETH Zürich: 16. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht 33

Commission Romande de Mathématiques **34**

Shaula Fiorelli Vilmart
Empilement de cercles 34

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Empilement hexagonal de cercles (Shaula Fiorelli Vilmart, Artikel S. 34 in dieser Ausgabe)

Einladung zur GENERALVERSAMMLUNG des VSMP
Invitation à l'ASSEMBLEE GENERALE de la SSPMP
Invito all'Assemblea generale della SSIMF

Freitag 27. November 2015 - *Vendredi 27 novembre 2015* – venerdì 27 novembre 2015
BRIG, Kollegium Spiritus Sanctus

I. Rahmenprogramm

16.00 Uhr Ausstellung „Passage Simplon" im Stockalperpalast (Treffpunkt im Stockalperhof)

II. Generalversammlung 2015 – *Assemblée générale 2015 – Assemblea generale 2015*

17:15 – 18:30 Uhr

Traktandenliste - *Ordre du jour – Ordine del giorno*
Begrüssung – *Salutations - Saluto*
1. Traktandenliste 2015, Protokoll 2014 - *Ordre du jour 2015, procès-verbal 2014* – Ordine del giorno 2015, verbale 2014
2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen – *Rapports annuels de la société et des commissions* – Rapporti annuali della società e delle commissioni
3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2014/15 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2014/15* – Conti annuali della società e delle commissioni 2014/15
4. Budget 2015/16 & Mitgliederbeitrag– *Budget 2015/16 & Cotisations* – Preventivo 2015/16 e quota sociale
5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni
6. Ersatzwahlen – élections complémentaires – elezioni suppletive
7. Anträge von Mitgliedern – Propositions des membres – Mozioni di membri
8. Varia – Divers – Eventuali

- Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2015 auf unserer Website www.vsmp.ch zu finden.
- *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet www.sspmp.ch à partir de fin d'octobre 2014.*
- A partire dalla fine di ottobre 2015 saranno disponibili sul sito www.ssimf.ch il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno (inclusivo dell' ordine del giorno).

III. Gemeinsames Abendessen – *Repas du soir en commun* - Cena comune

- Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.
- *Après l'assemblée générale on va prendre le diner ensemble. Le restaurant sera communiqué à la fin de l'AG.*
- Al termine è prevista una cena comune; il ristorante sarà comunicato all'AG.

Locarno, settembre 2015, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente

NEU INKLUSIVE E-BOOK

Ihr Unterricht mit dem idealen Begleiter leicht gemacht

DMK / DPK (Hrsg.)
Fundamentum
Formeln, Begriffe, Tabellen
für die Sekundarstufen I und II
Inklusive E-Book
8. überarbeitete Auflage 2015
120 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 22.–
ISBN 978-3-280-04098-0

Das «Fundamentum» überarbeitet und neu gestaltet

Die praktische Formelsammlung beinhaltet die zentralen Wissensinhalte zu Mathematik und Physik. Sachverhalte werden mit Worten knapp umschrieben. Die formale Sprache wird damit leicht verständlich. Die farbige Hinterlegung der Fakten und die Gestaltung der Hauptteile ermöglichen eine schnelle Orientierung.

Die englische Ausgabe erscheint auf das Schuljahr 2016/17.

DMK / DPK / DCK (Hrsg.)
Formeln, Tabellen, Begriffe
Mathematik – Physik – Chemie
Inklusive E-Book
5. erweiterte Auflage 2015
264 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 25.–
ISBN 978-3-280-04116-1

DMK / DPK / DCK (Hrsg.)
Formulae, Tables and Concepts
A Concise Handbook of
Mathematics – Physics – Chemistry
2014, 264 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 25.–
ISBN 978-3-280-04084-3

E-Book
Fr. 20.–
ISBN 978-3-280-03824-6

«Formeln, Tabellen, Begriffe» mit erweitertem Chemieteil

Das bewährte Nachschlagewerk wurde um acht Seiten in Chemie ergänzt und wird damit den Anforderungen des immer beliebteren Schwerpunktfaches Chemie/Biologie gerecht.

Die englische Ausgabe ist in Inhalt und Gestaltung identisch – parallel kann mit beiden Sprachversionen in einer Klasse gearbeitet werden.

orell füssli

Unsere E-Books:

- sind in der kostenlosen App vom Orell Füssli Verlag (im Apple App Store bzw. Google Play Store) oder unter https://reader.ofv.ch erhältlich.
- können offline auf iOS-Tablets (iPad) und Android-Tablets oder online in allen gängigen Browsern verwendet werden.
- sind mit verschiedenen interaktiven Funktionen angereichert.
- beinhalten verlinkte Inhaltsverzeichnisse, Seitenverweise und Internetadressen.

orell füssli Verlag
www.ofv.ch/lernmedien

Überraschende Funde zur Rechenmaschine Curta

Zeichnungen aus dem KZ Buchenwald, Schriftstücke aus Deutschland, Österreich und der Schweiz

Bei Nachforschungen zur Geschichte der Rechentechnik kamen am 25. November 2014 im Schreibmaschinenmuseum Beck in Pfäffikon ZH u.a. Zeichnungen zur legendären mechanischen Rechenmaschine Curta, anfänglich „Liliput“ genannt, zum Vorschein. Sie wurden im Konzentrationslager Buchenwald vom Erfinder Curt Herzstark erstellt. Der Nachlass, den Herzstarks Lebensgefährtin Christine Holub dem Museumsbesitzer Stefan Beck schenkte, umfasst zudem einen Briefwechsel mit berühmten, längst untergegangenen Schweizer Rechenmaschinenherstellern und Kundenverzeichnisse. Bemerkenswert ist ferner ein Vertriebsvertrag mit der Firma Rheinmetall-Borsig in Sömmerda, der kurz vor Herzstarks dramatischer Flucht aus Thüringen geschlossen wurde.

Herbert Bruderer

Die von 1947 bis 1971 von der Contina AG in Mauren FL gefertigte Curta gilt als die kleinste mechanische Rechenmaschine der Welt. Die bildhübsche „Pfeffermühle“, die in zwei Modellen auf den Markt kam, beherrscht alle vier Grundrechenarten. Über 140 000 Stück wurden gebaut. Das zierliche, nach wie vor voll funktionsfähige Gerät begeistert die Fachwelt bis heute.

Erfinder ist der hoch begabte Wiener Ingenieur Curt Herzstark (1902–1988). Sein Leben verlief äusserst tragisch. Der Halbjude wurde verhaftet und ins Konzentrationslager Buchenwald gebracht. Dort entwarf er die Konstruktionszeichnungen zur Liliput, die später Curta getauft wurde. Nach der Flucht aus Thüringen musste er in Wien feststellen, dass sein väterliches Erbe, eine Rechenmaschinenfabrik, für ihn verloren war. Fürst Franz Josef II. drängte ihn zur Produktion des Winzlings in Liechtenstein. Doch hier betrogen gewissenlose braune Verwaltungsräte den Schöpfer um sein bahnbrechendes Werk. Schliesslich verliessen ihn Frau und Kinder, um nach Wien zurückzukehren.

Betriebsratsprotokoll zur Flucht vor den russischen Häschern

Unter den Schriftstücken befindet sich auch ein Werkvertrag vom 16. Oktober 1945 zwischen der Rheinmetall-Borsig AG, Sömmerda, und ihrem technischen Direktor Curt Herzstark. Die fünfjährige Vereinbarung über den Alleinvertrieb aller Erzeugnisse aus dem Rechenmaschinenwerk Sömmerda wäre am 1. Januar 1946 in Kraft getreten. Doch es kam anders. Herzstarks Tätigkeit in Thüringen, wo Wilma Scherer (später Riegel) die Reinzeichnungen der Bleistiftskizzen aus dem KZ angefertigt hatte, war nur von kurzer Dauer. Das ist einem handschriftlichen Protokoll über die 12. Betriebsratssitzung vom 4. Dezember 1945 (Seite 2) zu entnehmen: „Hierauf teilte der Kollege Wittig [erster Vorsitzender des Betriebsrats] mit, das der techn. Direktor Herzstark unbemerkt unser Werk verlassen hat. Genaues könne bis jetzt nicht hierüber gesagt werden.“

Bild 1: Bisher unbekannte Darstellung: Universalrechenmaschine Liliput 1. Der österreichische Erfinder Curt Herzstark entwarf die Konstruktionszeichnungen im Konzentrationslager Buchenwald. © Schreibmaschinenmuseum Pfäffikon ZH

(Quelle: Historisch-technisches Museum der Stadt Sömmerda). Die halsbrecherische Flucht führte Herzstark über Prag nach Wien. Denn es drohte eine Entführung durch die russischen Häscher. Ihnen war die ursprünglich amerikanische Besatzungszone zugeteilt worden, was die Lage immer gefährlicher gemacht hatte.

Bild 2: Universalrechenmaschine Liliput 2. Die später Curta genannte kleinste mechanische Rechenmaschine der Welt wurde in Liechtenstein von der Contina AG hergestellt. © Schreibmaschinenmuseum Pfäffikon ZH (Diese Zeichnung ist auch im Werk von Christine Holub abgedruckt.)

Anfragen an Schweizer Maschinenbauer zur Herstellung der Curta

Beeindruckend sind auch die Briefe, die Herzstark im Februar 1946 von Wien aus an verschiedene Schweizer Unternehmen sandte. Ein Schreiben ging auch an die Hans W. Egli AG, Zürich, die Herstellerin der ersten brauchbaren Multiplikationsmaschine „Millionär“ und der weit verbreiteten Rechenmaschine Madas. Die Zürcher Precisa AG, eine führende Anbieterin von mechanischen und elektromechanischen Rechenmaschinen (Marke Precisa), hätte die Herstellung und den Vertrieb der Curta gern übernommen. Positiv war auch die Stellungnahme der Theo Muggli AG, Zürich (Rechenmaschinen Direct). Äusserst beschämend fiel hingegen die Antwort der Paillard SA, Yverdon, aus. Von Egli ist leider keine Reaktion überliefert.

Wer benutzte die Curta?

Im Museumsarchiv gibt es ferner (undatierte) Kundenverzeichnisse der Contina AG, Vaduz. Sie belegen, dass die Rechenmaschine rund um die Erde verkauft wurde. Zu den Schweizer Abnehmern gehörten etwa: Bundesverwaltung, Institut für angewandte Mathematik sowie Institut für technische Physik der ETH Zürich, Eidgenössische Anstalt für Wasserversorgung, Eidgenössische Materialprüfungsanstalt, Swissair Schweizerische Luftverkehr AG, Aluminium-Industrie AG, AG Brown Boveri & Cie., Maschinenfabrik Oerlikon, Escher-Wyss AG, Schweizerische Kreditanstalt, Schweizerische Rückversicherungs-Gesellschaft, Schweizerische Unfallversicherungs-Gesellschaft.

Deutsche Bezieher waren u.a. Oberfinanzdirektionen, Gas-, Wasser- und Elektrizitätswerke, Universitäten, Vermessungsämter, Deutsche Bundesbahn, Bergwerke, chemische und Maschinenfabriken, Banken, Versicherungen, Verlage (z. B. R. Oldenbourg, München). In Österreich erwarben z. B die Postdirektion, Textil- und Handelsunternehmen, die Nationalbank, Land- und Forstwirtschafsämter das technische Wunderwerk.

Hinweise auf Bücher

Das tragische Leben des genialen österreichischen Erfinders ist mit grosser Sorgfalt in diesem Buch aufgezeichnet:

- Curt Herzstark: Kein Geschenk für den Führer. Schicksal eines begnadeten Erfinders, herausgegeben von Christine Holub, unter Mitarbeit von Heinz Joss, Ute und Bernd Schröder, Books on demand, Norderstedt 2005

Eine umfassende Darstellung dieser und weiterer aufsehenerregender Funde erscheint in:

- Herbert Bruderer: Meilensteine der Rechentechnik. Zur Geschichte der Mathematik und der Informatik, Walter de Gruyter-Oldenbourg, Berlin/Boston 2015

Weitere Auskünfte:
Herbert Bruderer
+41 71 855 77 11
herbert.bruderer@bluewin.ch, bruderer@retired.ethz.ch

4.3.2015

Meilensteine der Rechentechnik

Zur Geschichte der Mathematik und der Informatik

Herbert Bruderer

- Zahlreiche neue Funde von seltenen historischen Analog- und Digitalrechnern und bisher unbekannten Schriftstücken, Zeichnungen und Bildern aus Deutschland, Österreich, Schweiz, Liechtenstein und Frankreich
- weltweite mehrsprachige Bibliografie zur Informatikgeschichte mit über 3000 Einträgen
- 12 Schritt-für-Schritt-Anleitungen für die Bedienung (analoger und digitaler) historischer Rechengeräte
- 75 vergleichende tabellarische Übersichten
- 200 Abbildungen
- 20 umfangreiche listenförmige Aufzählungen
- 7 Zeittafeln

De Gruyter Oldenbourg, Berlin 2015, rund 860 Seiten

In den 1970er Jahren verschwanden mechanische Rechenhilfsmittel jäh von der Bildfläche. Die Elektronik verdrängte sie. Die meisten Geräte, die seit dem 17. Jahrhundert entwickelt wurden – äußerst lehrreiche Konstruktionen –, sind längst vergessen. Wer kann sich heute noch vorstellen, wie beschwerlich das Rechnen vor wenigen Jahrzehnten war? Dieses Buch stellt ausgewählte Meilensteine aus der Vor- und Frühzeit der Informatik vor.

Der erste Analogrechner, das Räderwerk von Antikythera
Der im 1. Jh. v. Chr. geschaffene rätselhafte Mechanismus von Antikythera, der um 1900 bei einem Tauchgang vor einer griechischen Insel gefunden wurde, gilt als ältester Analogrechner. Mit zahlreichen Nachbauten (u.a. Internationales Uhrenmuseum in La Chaux-de-Fonds) versuchte man, die Geheimnisse dieses Kalenderrechners zu lüften. Es gibt Vermutungen, dass die Maschine aus der Schule von Archimedes stammt.

Androiden, Musikautomaten, Schachautomaten, Webstühle
Diese Abhandlung geht auch auf Themen ein, die mit der Rechentechnik verwandt sind: Figurenautomaten, Musikautomaten, *Musikdosen* sowie lochkartenbandgesteuerte Webstühle und Schreibmaschinen. Zur Sprache kommen die Schachautomaten des hochbegabten spanischen Gelehrten Torres Quevedo (20. Jh.), die prächtigen Androiden (künstliche Menschen) der Neuenburger Uhrmacher Jaquet-Droz (18. Jahrhundert), u.a. der großartige, nach wie vor funktionsfähige programmgesteuerte *Handschriftautomat* „Der Schriftsteller“. Eine ähnliche Maschine ist in Wien zu bestaunen.

Schickard, Pascal und Leibniz
Universalgenies aus Deutschland und Frankreich haben im 17. Jh. versucht, mechanische Rechenmaschinen zu bauen. Schwer zu lösen war der automatische Zehnerübertrag. In Wort und Bild werden berühmte „rechnende Räder“ behandelt. Reich verzierte, oft kreisrunde Kunstwerke waren beliebte Geschenke für gekrönte Häupter. Erst im 19. Jh. gelang es, praxistaugliche Vierspeziesmaschinen, die alle vier Grundrechenarten beherrschen, herzustellen. Das erste wirtschaftlich erfolgreiche, gewerblich gefertigte Gerät war das *Thomas-Arithmometer* aus Paris.

Erstmals werden alle bisher bekannten *Schweizer Hersteller mechanischer Rechenmaschinen* aufgelistet und deren Erzeugnisse miteinander verglichen. Die bedeutendsten Firmen waren die Egli AG mit der „Millionär“ und der „Madas“ sowie die Precisa AG (beide Zürich). Mit einer Madas hat auch Heinz Rutishauer, der Erfinder der automatischen Programmierung, in den 1950er Jahren an der ETH Zürich gerechnet.

Proportionalwinkel, Polarplanimeter, Pantografen und Koordinatografen
Die Rede ist von äußerst vielseitigen analogen Rechenhilfsmitteln wie Proportionalwinkel und Reduktionszirkel. Verschwunden und vergessen sind auch die einstigen Weltmarktführer für mechanische *Integrierge-*

räte: Amsler (Schaffhausen), Coradi (Zürich) und Ott (Kempten). Sie haben u.a. Planimeter (Flächenmesser) und Pantografen (Storchschnäbel) fabriziert. Diese wurden z.B. in Vermessungsämtern und der Textilindustrie (Stickerei) verwendet.

Rechentische
In den Rathäusern vieler Städte standen im Mittelalter und in der frühen Neuzeit schön geschnitzte Rechentische. Sie wurden für das Linienrechnen mit Rechensteinen benutzt, das später durch das Zahlenrechnen mit der Feder abgelöst wurde. Nur wenige Stück haben überlebt, vor allem in der Schweiz, in Deutschland und Frankreich.

Älteste erhaltene Tastenaddiermaschine der Welt
Die international bedeutendsten Funde betreffen *Jean-Baptiste Schwilgué*, den Schöpfer der astronomischen Uhr des Straßburger Münsters. In der *Sammlung Sternwarte der ETH Zürich* kam neben einem frühen Exemplar eines Thomas-Arithmometers die älteste, besterhaltene Tastenaddiermaschine der Welt (19. Jh.) zum Vorschein. Sie ziert das Titelbild des vorliegenden Buchs. Von Vormodellen abgesehen sind zwei Exemplare überliefert, ein älteres in Straßburg und ein etwas jüngeres Exemplar in Zürich, das in weit besserem Zustand ist.

„Prozessrechner" für die astronomische Uhr des Straßburger Münsters
Eine weitere große Überraschung war die Entdeckung (Dezember 2014) einer seltsamen, großen Addiermaschine im Straßburger Historischen Museum. Die Nachforschungen haben gezeigt, dass sie für die numerische Steuerung einer hoch präzisen Fräsmaschine diente, mit der die Zahnradgetriebe der astronomischen Uhr des Straßburger Münsters gefertigt wurden. Die Ergebnisse der aufwendigen Berechnungen wurden von Hand auf einen Papierstreifen übertragen, der in ein mit Rollen versehenes Kästchen der Schneidemaschine eingelegt wurde. Hier liegt also ein einfacher „Prozessrechner" vor. Die Straßburger Funde wurden 2015 in einer Sonderausstellung im Arithmeum der Universität Bonn gezeigt.

Hätte der Urahn des Computers, der englische Mathematiker *Charles Babbage,* die Zahnradfräsmaschine seines Zeitgenossen Schwilgué gekannt, hätte er vielleicht die berühmte programmgesteuerte *analytische Maschine* (19. Jh.), Vorläuferin der heutigen Digitalrechner, vollenden können. In den maßgebenden Veröffentlichungen zur Geschichte der Rechentechnik und der Informatik fehlen *Schwilgués* Rechenmaschinen. In den weltweit führenden technischen Museen wusste man bisher nichts davon.

24-Meter-Loga-Rechenwalze
Beschrieben wird auch der Fund von mächtigen 24-Meter-Rechenwalzen, den größten und genauesten Rechenwalzen der Welt. Diese analogen, logarithmischen Werkzeuge wurden früher in großen Stückzahlen in Banken und Versicherungen z.B. für Währungsumrechnungen verwendet. Auf den Trommeln sind 80 Skalenabschnitte zu 60 cm aufgetragen, was (wegen der Überlappungen) eine Skalenlänge von 24 m ergibt.

Curta, technisches Wunderwerk aus dem Konzentrationslager Buchenwald
Ausführlich wird von dem genialen österreichischen Ingenieur Curt Herzstark erzählt, der im Konzentrationslager Buchenwald die Konstruktionszeichnungen für die Curta entworfen hat, die kleinste mechanische Vierspeziesrechenmaschine der Welt. Ein neu aufgetauchtes Protokoll aus Thüringen belegt seine halsbrecherische Flucht vor sowjetischen Häschern. Die bildhübsche „Pfeffermühle" wurde in Liechtenstein in Serie hergestellt. Der Erfinder wurde aber um sein Lebenswerk betrogen.

Wer hat den Computer, den Compiler und das Speicherprogramm erfunden?
Diese Schrift bespricht eingehend den jahrzehntelangen Streit über die Erfindung des programmgesteuerten und des speicherprogrammierten Rechenautomaten (Von-Neumann-Rechner). Die Auseinandersetzungen zwischen amerikanischen und britischen Informatikhistorikern dauern bis heute an. Sie sind im Zusammenhang mit dem 100. Geburtstag von Alan Turing (2012), dem wohl wichtigsten Begründer der theoretischen Informatik, wieder aufgeflammt. Die *universelle Turingmaschine* (1936) ist ein mathematisches Modell des heutigen, speicherprogrammierten Digitalrechners.

Das Buch vermittelt einen *weltweiten Überblick über die ersten Computer,* die frühen Relais- und Röhrenrechner, die Pionierinnen und Pioniere der Rechentechnik und ihre Meisterwerke. Angeführt werden auch frühe Transistorrechner wie das Mailüfterl von Heinz Zemanek (Österreich) und die Schweizer Cora. Es wird ferner auf die *Entwicklungslinie*n von Rechenhilfsmitteln und ihre *Lebensdauer* eingegangen.

Alan Turing, Engima und Colossus: britisches Geheimdienstzentrum Bletchley Park
Ausführlich werden die dramatischen Ereignisse in Bletchley Park dargestellt, dem ehemaligen britischen Geheimdienstzentrum. Jahrzehntelang wurde selbst die Existenz des Elektronenrechners Colossus ver-

schwiegen. Lange Zeit hieß es, Premierminister *Winston Churchill* habe nach dem zweiten Weltkrieg die Zerstörung der beeindruckenden zehn Maschinen angeordnet. Mit dem Röhrenrechner wurde die *Lorenzmaschine SZ 40/42* geknackt, die von Adolf Hitler und dem Oberkommando des deutschen Heers genutzt wurde. Der von der britischen Post entwickelte Colossus 2 stand wenige Tage vor der Landung in der Normandie zur Verfügung. Der mit Stecktafeln gesteuerte Colossus gilt als weltweit erster großer Elektronenrechner.

Mit der von Alan Turing in Zusammenarbeit mit Gordon Welchman entworfenen „Turing-Welchman-Bombe", von der über 200 Stück hergestellt wurden, brach man die deutsche Enigma, von der etwa 100 000 Stück eingesetzt wurden. Die *Marine-Enigma* (U-Boot-Enigma) galt als unknackbar. Dieser Erfolg ist vor allem Alan Turing zu verdanken.

Schwierigkeiten beim Bau der Ermeth und misslungene Vermarktung

Im *Hochschularchiv der ETH Zürich* wurden viele *bisher unbekannte Dokumente z*ur Frühgeschichte der Informatik gefunden, u.a. Verträge zur legendären (gemieteten) Relaismaschine *Z4* des *deutschen Computererfinders Konrad Zuse*. Die ETH war 1950 die erste Universität in Mitteleuropa mit einem funktionstüchtigen programmgesteuerten Rechenautomaten. Nach der mittlerweile abgelaufenen Sperrfrist von 50 Jahren kamen auch Unterlagen zum Vorschein, die die erheblichen Schwierigkeiten schildern, die bei der Herstellung der erfolgreichen Ermeth auftraten. Viel Kopfzerbrechen bereitete die Entwicklung eines Magnettrommelspeichers. Die Dokumente, vor allem Briefe, erklären auch, warum die von der Berner Hasler AG (heute Ascom) beabsichtigte Vermarktung des ersten Schweizer Computers misslang. Bisher wusste man nichts von diesen Plänen. Bei den Nachforschungen zur Z4 wurde auch der einzige überlebende Zuse-*Rechenlocher*, die M9, aufgespürt. Von Zuse stammt auch die *erste Programmiersprache,* der Plankalkül.

Das Buch enthält eine Fülle von Abbildungen aus der *Hauptbibliothek der ETH Zürich* (Hochschularchiv, alte und seltene Drucke, Sammlung Sternwarte) mit einer kommentierten Bibliografie zu den Funden im Hochschularchiv.

Abakus: Wie rechnet man mit historischen Rechengeräten?

Es gibt nur noch wenige Leute, die wissen, wie man die früher weit verbreiteten, z.T. sehr vielseitigen Rechenhilfsmittel genutzt hat. Die meisten Dokumente wurden vernichtet. Mit dieser Schrift wird versucht, diese Lücke mit *Schritt-für-Schritt-Anleitungen* für die Bedienung bedeutender Rechengeräte (etwas) zu füllen. Mit einbezogen werden u.a. der chinesische Abakus (12. Jh.) bzw. der *japanische* und der *russische Abakus, Proportionalwinke*l und *Reduktionszirkel* (entstanden im Umfeld von Galileo Galilei und Jost Bürgi, 16./17. Jh.), *Rechenstäbchen von John Napier*, dem Mitentdecker der Logarithmen (17. Jh.), *Rechenstab* und *Rechenscheibe* (17. Jh.) sowie *Rechenwalze* (19. Jh.), mehrere *Zahlenschieber* und *mechanische Rechenmaschinen* (19. und 20. Jh.), z.B. die Curta.

Was für historische Rechenmaschinen haben überlebt, in welchen Museen stehen sie?

Die Abhandlung gibt in umfangreichen Listen Auskünfte darüber, in welchen *Museen* weltweit Meisterwerke der Rechentechnik, analoge und digitale Rechenhilfsmittel, zu finden sind.

Nachschlagewerk

Diese Veröffentlichung enthält ein umfangreiches Personen- und Sachverzeichnis und lässt sich daher auch als Nachschlagewerk verwenden. Erwähnt werden auch mehrere Zeitzeugenberichte zur Zuse Z4, Cora und Curta. Zudem wird eine neue Einteilung von analogen und digitalen, mechanischen und elektronischen Rechenhilfsmitteln vorgeschlagen.

Zielgruppen

Das allgemein verständliche Buch wendet sich an *Fachleute und Laien,* an Sammlerkreise, Informatiker/innen, Mathematiker/innen, Historiker/innen, Kuratorinnen und Kuratoren, Archivarinnen und Archivare, Restauratorinnen und Restauratoren, an alle, die sich mit der Technikgeschichte befassen.

Vom gleichen Verfasser: **Konrad Zuse und die Schweiz. Wer hat den Computer erfunden?**

de Gruyter Oldenbourg, Berlin/München 2012, XXVI, 224 Seiten

Herbert Bruderer ist Dozent i.R. am Departement für Informatik der ETH Zürich.

Bezug direkt beim Verlag, **de Gruyter, Berlin, http://www.degruyter.com**, oder im Buchhandel (Vorbestellmöglichkeit).

Stand: 1. September 2015

Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Im zweiten Teil dieser kleinen Reihe[1] über Schwingungsphänomene steht die sogenannte *van der Pol* (Differenzial-)Gleichung[2] im Mittelpunkt, siehe Teil I, Gleichung (9), also die Gleichung:

$$\ddot{x} - \epsilon[1 - x^2]\dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

Dabei schreibe ich zur Vereinfachung der Notation $x, \dot{x}, \ddot{x}$ an Stelle von $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$. Die Grösse ϵ ist ein Parameter, i.e. eine bestimmte (positive) Zahl. Die Gleichung (1) ist benannt nach *Balthasar van der Pol* (1889-1959), [6], der sie 1927 vorschlug, als er bei Philips arbeitete. Sie modelliert einen elektrischen Schwingkreis, bestehend aus einem Kondensator, einer Spule und einem Ohmschen Widerstand, in den überdies eine *Elektronenröhre* eingebaut ist. Für eine Begründung der vdP-Dgl siehe z.B. [1], p. 123ff, [3], p. 109f.

Die Entwicklung der Mathematik wird bekanntlich durch Probleme vorangetrieben, die schwierig sind, aber zu neuen Ideen anregen und sich mit hartnäckiger Arbeit doch früher oder später bewältigen lassen. Für das Gebiet der (gewöhnlichen) Differenzialgleichungen und Dynamischen Systeme darf die van der Pol-Gleichung (und Varianten von ihr) durchaus zu diesen Problemen gezählt werden.

Wie am Schluss von Teil I vermerkt wurde, besteht die Bedeutung der vdP-Dgl aus Sicht der Anwendung darin, dass sie *oszillatorisches Verhalten* beschreibt – und dies obwohl kein "Taktgeber" von aussen vorhanden ist, wie etwa bei der Gleichung von Duffing (siehe Teil I, dort den Cosinus-Term in (1)). Man spricht daher von *selbsterregten* Oszillationen oder Schwingungen. Ziel in diesem Artikel ist, (1) mit relativ einfachen mathematischen Mitteln zu untersuchen.

2

Eine Lösung lässt sich der vdP-Dgl sofort entlocken:

$$x(t) \equiv 0 \text{ (also: } x(t) = 0 \text{ für alle } t) \tag{2}$$

Tatsächlich: (2) ist Lösung von (1):

$$\ddot{0} - \epsilon[1 - 0^2]\dot{0} + 0 = 0 - \epsilon[1 - 0]0 + 0 = 0$$

Diese Rechnung zeigt: Gilt zu irgend einem Zeitpunkt t_0

$$x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0$$

[1] Teil I mit dem Titel "Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ..." ist im Heft 128, p. 24-30, dieses Bulletins erschienen.

[2] Kurz: vdP-Dgl.

so gilt[3] $x(t) \equiv 0$. Mit anderen Worten: *Der durch* (1) *modellierte Schwinger* kann *sich im Ruhezustand befinden.*

Wie steht es um andere Lösungen der Gleichung (1)? "Lösungsformeln" sind keine bekannt! Die Schwierigkeiten werden vom mittleren Term in der vdP-Dgl (1) verursacht, also von

$$[1 - x^2]\dot{x} = \dot{x} - x^2\,\dot{x} \tag{3}$$

weil er wegen des Produkts $x^2\,\dot{x}$ *nichtlinear* ist. Nichtlineare Probleme sind notorisch schwierig – wie schon "simple" quadratische Gleichungen wie $z^2 = 2$, $z^2 = -1$ zeigen.

3

Ich schlage vor, dass wir die vdP-Dgl für eine allererste Annäherung mit einer *linearen* Differenzialgleichung vergleichen – oder genauer gesagt: mit *zwei* linearen Differenzialgleichungen. In Teil I wurde die Gleichung[4]

$$\ddot{x} - 2b\,\dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

bereits angesprochen und deren Lösung für einen Spezialfall angegeben. Die allgemeine Lösung von (4) lautet[a]

$$x(t) = e^{bt}[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)],\ \omega := \sqrt{1 - b^2} \tag{5}$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass $b^2 < 1$ gilt, sodass ω eine reelle Zahl ist. Mit c_1, c_2 werden beliebig wählbare Zahlen bezeichnet.

Das Verhalten der Lösungen (5) ist ganz unterschiedlich, je nachdem, ob die Grösse b *positiv* oder *negativ* ist. In Abbildung 1 sind die Graphen von $x(t)$ gemäss (5) für $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0$, $b = 0.05$ (durchgezogen) und $b = -0.05$ (gestrichelt) für t zwischen 0 und 20 wiedergegeben.

Man erkennt an Formel (5) und Abbildung 1: Unabhängig vom Vorzeichen von b liegt oszillatorisches Verhalten (mit Periode $2\pi/\omega$) vor. Aber im Fall $b > 0$ (durchgezogen gezeichnet) wächst die Amplitude der Schwingung (exponentiell) an, im Fall $b < 0$ (gestrichelt gezeichnet) dagegen wird sie (exponentiell) gedämpft.

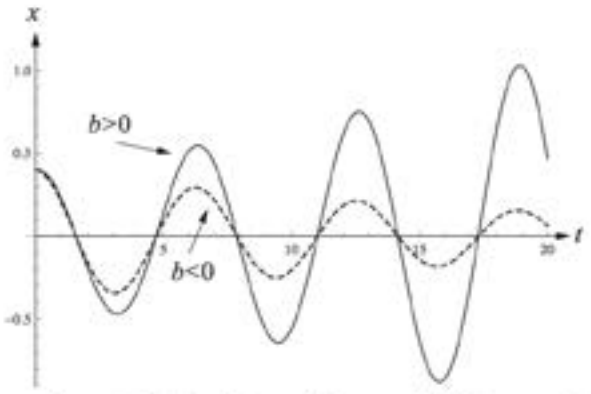


Abbildung 1: Grafische Darstellung der Funktion $x(t)$ aus (5) für $c_1 = 0.4$, $c_2 = 0$, $b = 0.05$ (durchgezogen) und $b = -0.05$ (gestrichelt) für t zwischen 0 und 20.

[3] Weil die Lösung von (1) zu vorgegebener Anfangsbedingung *eindeutig* bestimmt ist, siehe Abschnitt 5.

[4] Wobei dort anstelle von b die Bezeichnung $-\delta$ verwendet wurde. Wie δ ist b ein Parameter, i.e. eine bestimmte (reelle) Zahl.

Wenn man die Gleichungen (1) und (4) miteinander vergleicht, ist man versucht

$$\epsilon[1 - x^2] = 2b$$

zu setzen, was natürlich ganz unstatthaft ist, weil links eine im allgemeinen variable Grösse, rechts aber eine Konstante steht!

Immerhin darf man vielleicht wie folgt argumentieren: Wenn für eine Lösung $x(t)$ von (1) in einem gewissen t-Intervall $[x(t)]^2 < 1$ gilt, das heisst $\epsilon[1 - x(t)^2] > 0$, entspricht das ganz grob der Gleichung (4) für $b > 0$. Wenn umgekehrt in einem gewissen t-Intervall $[x(t)]^2 > 1$, also $\epsilon[1 - x(t)^2] < 0$ gilt, entspricht das grob der Gleichung (4) für $b < 0$.

Daraus folgt für die vdP-Dgl (1): Wenn die Amplitude der Schwingung $x(t)$ *klein* ist, wird die Schwingung *angefacht*, ist sie hingegen *gross*, wird die Amplitude *gedämpft*. Und dazwischen muss ja wohl ein Art "Trennlinie" verlaufen?

Solche Überlegungen sind natürlich bei weitem kein Beweis für die am Schluss von Teil I gemachte Behauptung, die vdP-Dgl (1) beschreibe robustes periodisches Verhalten. Aber sie machen diese Behauptung – aus Sicht der Mathematik – plausibel.

Ein Wort zur Physik. Ein elektrischer Schwingkreis bestehend aus einem Kondensator und einer Spule ist ein Schwinger – einer Feder vergleichbar – der durch einen Ohmschen Widerstand[5] gedämpft wird. Woher kommt die Energie, die für das Anfachen der Schwingung benötigt wird, wenn die Amplitude klein ist, und um den Schwingungszustand aufrecht zu erhalten (cf. die Diskussion in Abschnitt 3 in Teil I)? Offenbar wird sie von der Elektronenröhre geliefert – das ist gerade ihre Aufgabe!

4

Die Theorie (gewöhnlicher) Differenzialgleichungen und Dynamischer Systeme wurzelt in Newton's Theorie der Bewegung und die Ursprünge der sogenannten Theorie der (nichtlinearen) Schwingungen, der unser Thema entstammt, reichen auch schon mehr als 100 Jahre zurück.

Während sich der "Vater" der (modernen, das heisst *geometrisch* ausgerichteten) Theorie der Dynamischen Systeme, der Jahrhundert-Mathematiker *Jules Henri Poincaré* (1854-1912), primär durch das Newtonsche Modell der Himmelsmechanik[b] inspirieren liess, haben sich in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts insbesondere eine ganze Reihe sowjetischer Mathematiker mit der Theorie der nichtlinearen Schwingungen beschäftigt und sich da grosse Verdienste erworben.

Die Theorie der nichtlinearen Schwingungen ist im Gegensatz zur Himmelsmechanik "down to earth": Es geht um schwingungsfähige *mechanische* Systeme, vor allem aber auch um *elektrische* Schwingkreise – die damals dem technischen Fortschritt entsprechend ins Blickfeld kamen. Viele Fragestellungen konnten somit auch *experimentell* untersucht und aus Theorie und Experiment gewonnene Erkenntnisse *technisch* genutzt werden.

Neben einem gewaltigen Schub in der mathematischen Entwicklung der Theorie der Dynamischen Systeme seit dem 2. Weltkrieg hat die Hervorbringung von Computern und die damit verbundene, immer reichlicher verfügbare Rechenleistung das Gebiet vorangebracht: Mit immer besserer Software lässt sich nun wunderbar bequem "experimentieren" – die Herren Duffing und van der Pol (und viele andere) wären gewiss bass erstaunt ...

[5] Der Term, der den Widerstand modelliert, ist im linearen Teil von (3) enthalten.

5

In diesem Abschnitt werden ein paar Plots vorgestellt, die mit dem Software-Paket NDSolve von Mathematica zur *numerischen* "Lösung" von Differenzialgleichungen erzeugt wurden, um die Überlegungen aus Abschnitt 3 zu stützen.

Abbildung 2 zeigt zwei (Näherungs-)Lösungen der vdP-Dgl (1) für $\epsilon = 0.2$ und über dem Zeitintervall $[0, 50]$. Die ausgezogen gezeichnete gehört zur Anfangsbedingung $x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = 0$. Für die andere, gestrichelt gezeichnete, gilt $x(0) = 4.0$, $\dot{x}(0) = 0$. Bei beiden erkennt man einen "Einschwingvorgang": Bei der ersten ist die Amplitude zunächst klein, wächst dann, bis ein *stationärer Schwingungszustand* erreicht ist. Bei der zweiten, gestrichelt gezeichneten (Näherungs-)Lösung ist die Amplitude zunächst recht gross, wird aber bald gedämpft und es stellt sich auch hier mit der Zeit ein stationärer Schwingungszustand ein. Amplituden und Perioden bei beiden stationären Schwingungen scheinen gleich gross zu sein. Die beiden stationären Schwingungen erreichen jedoch ihre Maxima und Minima nicht zur gleichen Zeit: sie sind *phasenverschoben*, wie man sieht.

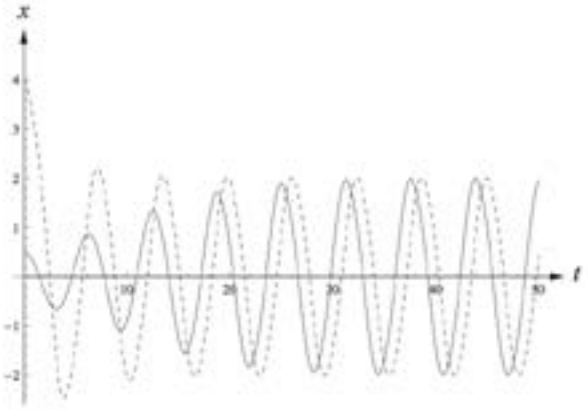


Abbildung 2: Zwei (Näherungs-)Lösungen der vdP-Dgl (1) für $\epsilon = 0.2$; beide streben, wenn auch phasenverschoben, gegen den gleichen stationären Schwingungszustand.

Abbildung 3 zeigt die Darstellung der beiden Lösungen im sogenannten *Phasenportrait*. Wenn man zusätzlich zur Funktion $x(t)$ ihre Ableitung $v(t) := \dot{x}(t)$ einführt, lässt sich die Differenzialgleichung (1), die 2. Ordnung ist, bekanntlich als *System* zweier Differenzialgleichungen 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \epsilon(1 - x^2)v - x \end{cases} \tag{6}$$

Ist nun $(x(t), v(t))$ eine Lösung von (6), so definiert diese via die *Parameterdarstellung*

$$\begin{cases} x &= x(t) \\ v &= v(t) \end{cases} \tag{7}$$

eine Kurve in der x-v-Ebene. Die Ebene heisst *Phasenebene* und die Kurve *Phasenkurve*, oder *Orbit*, oder *Lösungskurve* der betrachteten Lösung.

In Abbildung 3 sind Stücke der Phasenkurven zu den beiden Lösungen aus Abbildung 2 gezeichnet. Die im Uhrzeigersinn nach aussen spiralende Lösungskurve ist durchgezogen gezeichnet, die von aussen, ebenfalls im Uhrzeigersinn, jedoch nach innen spiralende Lösungskurve ist gestrichelt gezeichnet. Das Bild macht den Anschein, dass die beiden Lösungskurven gegen die gleiche, *geschlossene Kurve* spiralen, die eine von innen, die andere von aussen.

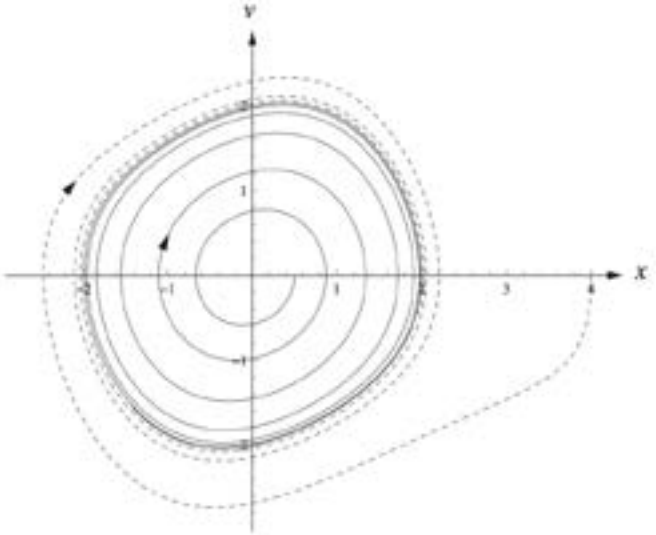


Abbildung 3: Darstellung der Lösungskurven zu den beiden Lösungen aus Abbildung 2; die eine spiralt im Uhrzeigersinn nach aussen, die andere von aussen nach innen.

Die Gesamtheit aller Lösungskurven der Differenzialgleichung (1) beziehungsweise des (ebenen)[6] Systems (6) heisst ihr *Phasenportrait*. Aus dem bekannten *Satz* über die *Existenz* und *Eindeutigkeit* von *Lösungen* von Differenzialgleichungssystemen zu vorgegebenen Anfangsbedingungen folgt, dass es durch jeden Punkt der Phasenebene eine Lösungskurve gibt, und dass sich Phasenkurven von ebenen Systemen nicht schneiden oder berühren können: Zwei Phasenkurven sind entweder identisch oder sie haben keinen gemeinsamen Punkt. Ein Phasenportrait stellt also eine "Auffächerung" der Phasenebene durch Lösungskurven dar. Man spricht daher auch von einer *Strömung*[7], besonders wenn noch durch einen *Pfeil* angedeutet wird, in welcher Richtung die entsprechende Phasenkurve mit wachsender Zeit[8] durchlaufen wird.

Natürlich kann (und soll) man nicht sämtliche Phasenkurven wirklich zeichnen, denn das ergäbe lediglich ein vollkommen schwarzes Blatt. Die Aufgabe ist vielmehr, eine *repräsentatitive Auswahl* so zu treffen, dass man sich das vollständige Phasenportrait leicht vorstellen kann!

In Abbildung 4 ist (nur) noch je ein kleineres Stück der beiden Phasenkurven aus Abbildung 3 gezeichnet, sowie die erwartete *geschlossene Kurve p*; überdies ist der Nullpunkt der Phasenebene hervorgehoben: Er stellt ebenfalls eine Phasenkurve dar – sie gehört zur Lösung $x(t) \equiv v(t) \equiv 0$, also zum *Ruhezustand des Schwingers*, auf den schon in Abschnitt 2, siehe Gleichung (2), hingewiesen wurde.

Die geschlossene Kurve p repräsentiert den (vermuteten) stationären Schwingungszustand der vdP-Dgl in der Phasenportrait-Darstellung. Gezeichnet wurde er mit Hilfe einer der beiden spiralenden Lösungskurven – es ist ein Ausschnitt, jedoch *ohne* den Einschwingvorgang.

Die Computersimulationen in diesem Abschnitt bestätigen, dass die Betrachtung der linearen Differenzialgleichung (4) (für verschiedene Vorzeichen des Parameters b) ganz gute Anhaltspunkte für die in der vdP-Dgl steckenden Dynamik liefert. Und zusammen ergibt sich ein einfaches und überzeugendes Bild: Es belegt, dass sich das durch die vdP-Dgl beschriebene schwingende System hinsichtlich der auftretenden Phänomene kaum vom einfachen Modell einer Pendeluhr unterscheidet, das im Teil I zur Diskussion gestellt wurde.

[6] Systeme von 2 gewöhnlichen Differenzialgleichungen erster Ordnung nennt man 2-*dimensional* oder *eben*.
[7] *Englisch: (phase)flow.*
[8] D.h. wachsenden Werten von t.

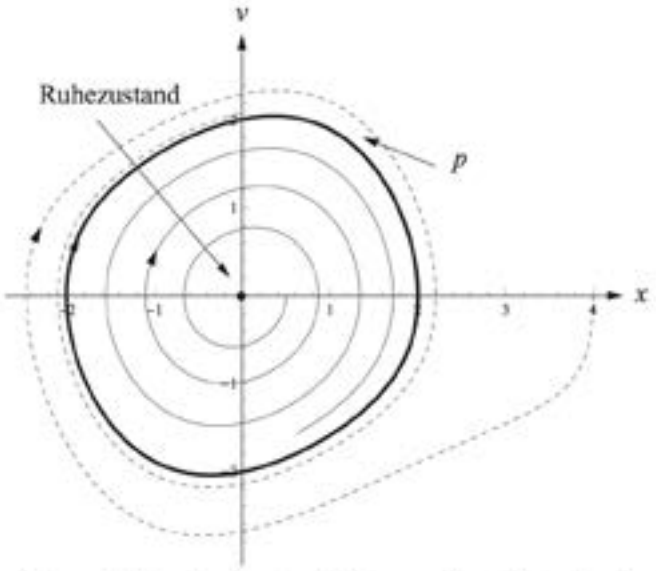


Abbildung 4: Der stationäre periodische Zustand ist repräsentiert durch die stark ausgezogene geschlossene Kurve p, der Ruhezustand des Schwingers durch den stark markierten Nullpunkt. Zwei Lösungskurven die gegen den stationären periodischen Zustand streben, eine von innen – weg vom Ruhezustand, die andere von aussen, sind schwach durchgezogen bzw. gestrichelt gezeichnet.

6

Eher pragmatisch eingestellte Leserinnen und Leser dieses Artikels sind vermutlich bereit, sich mit der bisherigen Analyse der vdP-Dgl zufrieden zu geben. Stärker mathematisch Interessierte hingegen möchten sich vermutlich weder mit den (sehr!) heuristischen Betrachtungen aus Abschnitt 3, noch mit den numerischen Rechnungen aus Abschnitt 5 begnügen und fragen nach mehr *Einsicht*.

Es lässt sich *beweisen*, dass die vdP-Dgl genau eine periodische Lösung besitzt, die alle übrigen Lösungen anzieht – abgesehen von der Ruhelage natürlich. In Anhang III des Klassikers von J.J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, [5], findet man einen Existenzbeweis für die periodische Lösung, in Anhang IV der Nachweis ihrer Eindeutigkeit. Für eine etwas allgemeinere Klasse von Gleichungen – die sogenannte *Gleichung von Liénard* – findet man einige Resultate und teilweise Beweise in [2]. Die Lektüre ist anspruchsvoll und eine Darstellung würde den Rahmen dieses einführenden Artikels sprengen. Aber eine *zentrale Idee* lässt sich vorstellen. Sie stammt von Poincaré. Und für hinreichend kleine (positive) Werte von ϵ lässt sich der zitierte Satz mit ihr beweisen, cf. Abschnitt 8.

7

Die positive x-Achse ist für die vdP-Dgl eine sogenannte *section de Poincaré*, wie die Franzosen gerne sagen, ein *Poincaré-Schnitt* auf deutsch.

Wenn man irgendeinen Punkt $(a_0, 0)$ auf der nicht-negativen x-Achse wählt und die Lösung $(x(t), v(t))$ der vdP-Dgl (6) zur Anfangsbedingung $x(0) = a_0$, $v(0) = 0$ betrachtet, wird diese nach einer gewissen Zeit $T > 0$ (zum ersten Mal) wieder auf die nicht-negative x-Achse treffen[9], siehe Abbildung 5. Damit

[9] T hängt von a_0 (und von ϵ) ab: $T = T(a_0, \epsilon)$. Für ϵ hinreichend klein folgt die Aussage aus dem Satz über die *stetige Abhängigkeit* der Lösungen von (6) vom Parameter ϵ.

wird eine *Abbildung* P der nicht-negativen x-Achse auf sich definiert:

$$P : a_0 \in \mathbf{R}^+ \to a_1 := P(a_0) = x(T, a_0) \in \mathbf{R}^+ \tag{8}$$

Die Abbildung P heisst *Poincaré-Abbildung*.

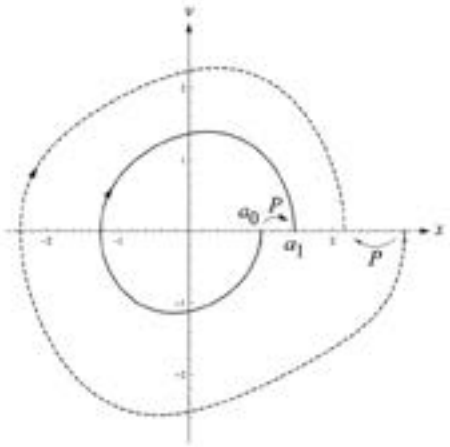


Abbildung 5: Die der vdP-Dgl "zugeordnete" *Poincaré-Abbildung* P, siehe (8): Zwei Punkte und ihre Bilder unter P, berechnet mit NDSolve von Mathematica für $\epsilon = 0.2$.

Mit Hilfe eines numerischen Lösungsverfahrens für Differenzialgleichungen lässt sich die Poincaré-Abbildung zur vdP-Dgl bei vorgegebenem ϵ (approximativ) berechnen[c]. Abbildung 6 zeigt das Resultat für $\epsilon = 0.2$.

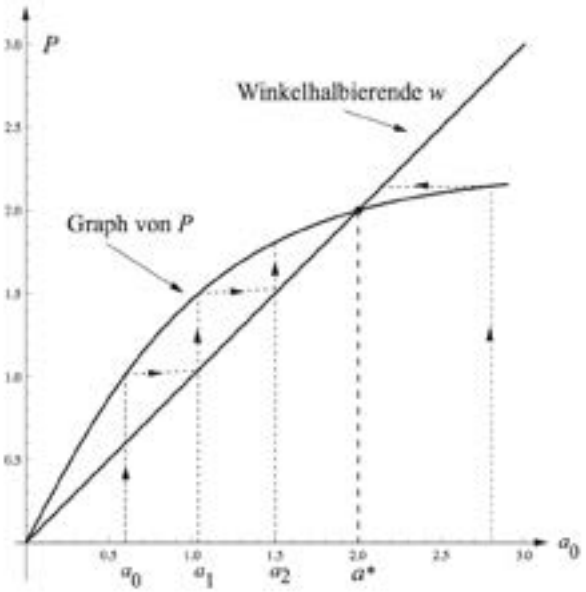


Abbildung 6: Die der vdP-Dgl "zugeordnete" *Poincaré-Abbildung* P für $\epsilon = 0.2$, berechnet mit NDSolve von Mathematica, Details, siehe Endnote c.

Sie *erkennen*: Die Abbildung (8) ist das *Pendant* der Abbildung $v_0 \to \lambda v_0 + \Delta$ im ersten Teil dieser Artikelreihe[10], dort Abschnitt 2.

[10]Siehe Fussnote 1.

Durch die Abbildung P, (8), wird (wieder) ein *diskretes dynamisches System* (abgekürzt: ddS) auf der nicht-negativen x-Achse definiert. Die *Pointe* ist, dass man das Verhalten der Lösungskurven der vdP-Dgl in der Phasenebene aus dem Verhalten der Bahnen dieses ddS ablesen kann!

Unter einer *Bahn* des durch P definierten ddS versteht man eine Zahlfolge $a_0, a_1, a_2, ...$ wobei

$$a_1 = P(a_0),\ a_2 = P(a_1),\ a_3 = P(a_2),\ ... \tag{9}$$

gilt. Dabei heisst a_0 *Start-* oder *Anfangswert* der Bahn. In Abbildung 6 ist angedeutet, wie man die Bahn $a_1, a_2, ...$ des ddS P, ausgehend von einem Startpunkt a_0, mit Hilfe der Winkelhalbierenden im Prinzip *grafisch* gewinnen kann. Daraus erkennt man folgendes: A) Die Zahl a^* – es ist die Abszisse des Schnittpunkts des Graphen von P mit der Winkelhalbierenden – ist ein *Fixpunkt* des ddS P. Das heisst, die Bahn mit Startwert a^* lautet:

$$a_0 = a^*, a_1 = P(a^*) = a^*, a_2 = a^*, a_3 = a^*, ... \tag{10}$$

B) Ganz analog ist 0 Fixpunkt von P:

$$a_0 = 0 = a_1 = a_2 = a_3 = ... \tag{11}$$

C) Für alle Startwerte $a_0 \neq \{0, a^*\}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^* \tag{12}$$

Diese Eigenschaften des ddS P folgen aus folgenden Eigenschaften der Funktion P:

α) P ist monoton wachsend.
β) Der Graph von P hat genau zwei Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden w: $(0,0)$ und (a^*, a^*).
γ) Der Graph von P verläuft über dem Intervall $(0, a^*)$ *oberhalb*, rechts von a^* *unterhalb* von w.

Dass α) gilt, ist kein Zufall: Diese Eigenschaft folgt aus der in Abschnitt 5 schon vermerkten Eigenschaft, dass verschiedene Lösungskurven der vdP-Dgl (6) keine gemeinsamen Punkte haben und einem Blick auf Abbildung 5. Die Eigenschaften β), γ) hingegen reflektieren Eigenschaften der spezifischen Nichtlinearität $\epsilon[1 - x^2]\dot{x}$ der vdP-Dgl (1), bzw. (6).

8

Die vdP-Dgl (1) hängt vom Parameter ϵ ab. Unter der Voraussetzung

$$\epsilon > 0, \quad \text{hinreichend klein} \tag{13}$$

können wir die Existenz von anziehendem periodischen Verhalten in der Dynamik der vdP-Dgl auch noch ganz ohne Computer-Unterstützung nachweisen.

In Endnote c wurde gezeigt, dass für die Poincaré-Abbildung P für die vdP-Dgl gilt

$$P(a_0) = a(2\pi, a_0) \tag{14}$$

siehe (25). Dabei bezeichnet $a(\varphi, a_0)$ die Lösung der Differenzialgleichung[11]

$$a' = \epsilon \frac{a(1 - a^2\cos^2\varphi)\sin^2\varphi}{1 + \epsilon(1 - a^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi} \tag{15}$$

[11] Der Akzent bezeichnet die Ableitung nach der Variablen φ.

zur Anfangsbedingung $a(0) = a_0$. Nun hängt die Lösung $a(\varphi, a_0)$ von (15) und damit die Poincaré-Abbildung $P(a_0)$ in Tat und Wahrheit vom Parameter ϵ ab. Es ist nicht schwierig, $a(\varphi, a_0, \epsilon)$ und dann $P(a_0, \epsilon)$ nach ϵ zu entwickeln. Da sich die Differenzialgleichung (15) für $\epsilon = 0$ auf die triviale Gleichung $a' = 0$ reduziert, startet die Entwicklung mit der *Identität*

$$P(a_0, \epsilon) = a_0 + ... \tag{16}$$

Etwas mehr (aber nicht viel!) Anstrengung kostet die Bestimmung des nächsten Terms in der Entwicklung nach ϵ. Man findet nach etwas Rechnung:

$$P(a_0, \epsilon) = a_0 + \epsilon(a_0 - \frac{1}{4}a_0^3)\pi + \epsilon^2(...) + ... \tag{17}$$

Nun vernachlässigt man zunächst die Terme zweiter und höherer Ordnung in ϵ und untersucht die Abbildung

$$\tilde{P}(a_0, \epsilon) = a_0 + \epsilon(a_0 - \frac{1}{4}a_0^3)\pi \tag{18}$$

Wählen Sie $R > 2$, beliebig. Für alle positiven, hinreichend kleinen Werte von ϵ und $a_0 \in [0, R]$ hat $\tilde{P}$ die Eigenschaften α), β) und γ) aus Abschnitt 7, wobei $a^* = 2$ gilt. Dasselbe gilt auch für die Abbildung P aus (17), wobei $a^* = a^*(\epsilon) = 2 + \epsilon(...)$ ist.

Das bedeutet: Die vdP-Dgl hat eine *periodische Lösung*. Ihre *Phasenkurve* ist näherungsweise ein *Kreis* mit Radius 2 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Sie zieht *alle* anderen Lösungen aus einer *beliebig gross* vorgegebenen Umgebung des Nullpunkts an (abgesehen von der Gleichgewichtslösung $x(t) \equiv 0$), sofern $\epsilon > 0$, hinreichend klein gewählt ist.

9

Zum Schluss noch folgendes: Selbsterregung tritt keineswegs nur in mechanischen Systemen und elektrischen Schwingkreisen auf. Furore machte die Entdeckung von Selbsterregung in der Chemie bei sogenannten *autokatalytischen Reaktionen*. Legendär ist das Beispiel der *Belousov-Zhabotinskii*-Reaktion, siehe [4], p. 179ff. Man spricht von einer "chemischen Uhr".

Eng mit der vdP-Dgl verwandt ist das *FitzhHugh-Nagumo*-Modell der berühmten *Hodgkin-Huxley*-Gleichungen, die die Übertragung von elektrischen Signalen im neuronalen System modellieren, siehe [4] p. 161ff. Fazit: *Selbsterregung ist ein Phänomen von universeller Bedeutung.*

10

Der Autor dankt Norbert Hungerbühler, Martin Lieberherr und Daniel Stoffer herzlich für zahlreiche wertvolle Hinweise, die Eingang in das Manuskript gefunden und es verbessert haben.

Notes

*Ähnlich wie man die "gemischt" quadratische Gleichung

$$z^2 + 2\beta z + \gamma = 0$$

durch die Transformation $z = y - \beta$ in die "rein" quadratische Gleichung

$$y^2 + (\gamma - \beta^2) = 0$$

überführen kann, gelingt es, durch die Transformation

$$x(t) = e^{bt} y(t)$$

den linearen Term $2b\dot{x}$ in der Differenzialgleichung (4) wegzutransformieren. Die Differenzialgleichung für y lautet, wie eine Rechnung zeigt:

$$\ddot{y} + (1 - b^2)y = 0$$

Unter der Voraussetzung $0 < b^2 < 1$ ist die "allgemeine" Lösung dieser Differenzialgleichung

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t), \quad \omega := \sqrt{1 - b^2}$$

wobei c_1, c_2 beliebig wählbare Zahlen bezeichnen, die zum Beispiel dazu benützt werden können, um die Anfangsbedingung

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0$$

für vorgegebene Zahlen y_0, $\dot{y}_0$ zu erfüllen.

[b]Endlich viele Massenpunkte ziehen sich paarweise nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz an und bewegen sich gemäss dem Grundgesetz der Mechanik.

[c]Zur Bestimmung der Poincaré-Abbildung P zur vdP-Dgl ist es zweckmässig in der Phasenebene x, v, *Polarkoordinaten* φ, A zu verwenden. Wenn A den Abstand eines Punkts (x, v) vom Nullpunkt und φ den Polarwinkel, gemessen von der positiven x-Achse und im Uhrzeigersinn, bezeichnet, gilt

$$x = A\cos\varphi, \quad v = -A\sin\varphi \tag{19}$$

Eine Phasenkurve hat dann die Darstellung

$$A = a(\varphi) \tag{20}$$

und eine Lösung $(x(t), v(t))$ wird durch eine Funktion

$$\varphi = \phi(t) \tag{21}$$

beschrieben. Gesucht ist die Differenzialgleichung für $a(\varphi)$. Ein Akzent bezeichne die Ableitung nach φ, der Punkt, wie bisher, die Ableitung nach t. Denkt man sich (20) in (19) eingesetzt, sodann (21) für φ und leitet nach t ab, folgt unter Benützung von (6) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= [a'\cos\varphi - a\sin\varphi]\dot{\phi} &= -a\sin\varphi \\ \dot{v} &= [-a'\sin\varphi - a\cos\varphi]\dot{\phi} &= -a\cos\varphi - \epsilon f \end{cases} \tag{22}$$

Dabei wurde die Abkürzung

$$f(x, v) := -(1 - x^2)v = (1 - a^2\cos^2\varphi)a\sin\varphi \tag{23}$$

benutzt. Indem man aus (22) die Grösse $\dot{\phi}$ eliminiert und dann die verbleibende Gleichung nach a' auflöst, erhält man die gesuchte Differenzialgleichung für die Funktion $a(\varphi)$

$$a' = \epsilon \frac{f\sin\varphi}{1 + \epsilon(f/a)\cos\varphi} \tag{24}$$

Bezeichnet $a(\varphi, a_0)$ die Lösung von (24) zur Anfangsbedingung $a(0) = a_0$, so ist die gesuchte Poincaré-Abbildung, siehe (8), (14), durch die Vorschrift

$$P(a_0) = a(2\pi, a_0) \tag{25}$$

gegeben. Abbildung 6 wurde mit Hilfe des numerischen Lösers NDSolve genau so, also unter Verwendung der Differenzialgleichung (24), ermittelt.

Literatur

[1] P. Hagedorn: *Non-linear oscillations*, 1981.
[2] H. W. Knobloch, F. Kappel: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, p. 198 ff, 1974.
[3] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976[3].
[4] J. D. Murray: *Mathematical Biology*, 1989.
[5] J. J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, 1950.
[6] B. van der Pol: *On relaxation-oscillations*, The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J of Sci. 2, 1927, p. 978-992.

UK/20150603

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht
Programm HS 2015

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 22. Oktober 2015

Dr. Carla Cederbaum, Universität Tübingen, Fachbereich Mathematik, D - 72076 Tübingen

Titel: Mathematik lehren - oder lehren, Mathematik zu lernen (und lehren)?

Abstrakt: Im Laufe ihrer Ausbildung als Mathematiker und Lehrende in der Mathematik entwickeln die meisten Mathematiker ihren eigenen Stil und ihre eigene Methodik des Mathematiklehrens. Dies tun wir auf der Basis unserer (reflektierten) Erfahrungen als Studierende und Lehrassistenten, manche von uns auch auf der Basis von systematischem Ausprobieren und durch Diskussion mit Kollegen. Ich werde Argumente dafür liefern, dass wir -- in Schule und Hochschule -- auch Untersuchungsergebnisse von Sozialwissenschaftlern und Psychologen berücksichtigen sollten, insbesondere Ergebnisse und Erkenntnisse darüber, wie Menschen allgemein lernen und wie Menschen speziell Mathematik lernen.

Um diese Idee zu illustrieren, werde ich einige Beispiele von Lehrmethoden vorstellen, die ich auf dieser Basis entwickelt habe. Insbesondere werde ich auf den Einsatz von Aufsätzen im Mathematikunterricht eingehen. Diese setze ich auf mehrere Arten und Weisen ein: Zum Beispiel lasse ich Studierende und Schüler neu gewonnene Erkenntnisse populärwissenschaftlich beschreiben ("Wie würdest Du das Deinen kleinen Geschwistern erklären?"), um die Sicherheit und Selbständigkeit im Umgang mit dem Stoff zu erhöhen. Auch habe ich gute Erfahrungen damit gemacht, Studierende längere Texte verfassen zu lassen, in denen sie verschiedene Methoden anhand eines relativ konkreten Beispiels wiederholen und zu einem kohärenten Bild integrieren können.

Donnerstag, 5. November 2015

Prof. Dr. Anna Beliakova, Universität Zürich, Institut für Mathematik, CH-8057 Zürich

Titel: Knoten und Kettenbrüche

Abstrakt: Mathematische Knoten stellen ein wunderbares didaktisches Mittel dar, um Vorurteile gegenüber der Mathematik abzubauen. Hier geht es nicht um schnelles Rechen, sondern um kreatives Denken.

Ausserdem bietet dieses Thema eine Vielfalt von Blickwinkeln, die vom spielerischen Vorgehen bis hin zu anspruchsvollen Aufgaben für Gymnasiastinnen und Gymnasiasten reicht, und die es erlaubt, den Schulunterricht unkonventionell zu gestalten.

Im Vortrag, nach einer Einführung von mathematischen Knoten, zeige ich, wie eine grosse Familie von Knoten mit Hilfe von Kettenbrüche verstanden werden kann.

Donnerstag, 19. November 2015

Prof. Dr. Nicole Marheineke, Universität Erlangen-Nürnberg, Department Mathematik, D - 91058 Erlangen

Titel: Mathematiker spinnen?! — Einblicke in die asymptotische und stochastische Modellierung für das Design technischer Textilien

Abstrakt: In stochastischen Produktionsprozessen von Filamenten und Vliesstoffen wird eine heiße Schmelze durch schnelle Luftströmungen zu dünnen Faserjets versponnen und verwirbelt. Zur optimalen Produktauslegung ist eine effiziente Simulation des Multiskalen-Mehrphasenproblems nötig. Allerdings lässt seine Komplexität direkte monolithische numerische Verfahren scheitern. Daher ist hier die mathematische Modellierung gefordert, eine geeignete vereinfachte, aber trotzdem umfassende Problembeschreibung zu entwickeln. Dabei kommen u.a. asymptotische Störungstheorie, Homogenierungsstrategien, Dimensionsanalyse, stochastische Ersatzmodelle und Parameteridentifikationen zum Einsatz.

Donnerstag, 3. Dezember 2015

Frau Kristine Barro-Bergflödt, ETH Zürich , Department Mathematik, CH – 8092 Zürich

Titel: Quaternionen oder der Gürteltrick von Dirac

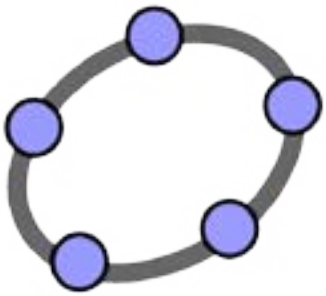
Abstrakt: Kaum finden sich die Schülerinnen und Schüler im abstrakten Neuland der komplexen Zahlen einigermassen zurecht, kommt bei manchen der Hunger nach mehr und sie stellen wie schon Hamilton die tiefe mathematische Frage: Was kommt nach den komplexen Zahlen? Der Vortrag wirft ein Licht auf die Geschichte der Quaternionen, ihre Beziehung zu räumlichen Rotationen und die Frage nach weiteren "Zahlen".

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Deutschschweizerische Mathematikkommission (DMK) des
Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte

Einladung zum

„Geogebra – Workshop II“



GeoGebra im Mathematikunterricht In den letzten Jahren hat sich das Programmpaket Geogebra weiterentwickelt. War es ursprünglich vor allem eine Software für Dynamische Geometrie, so ist nun Computeralgebrasystem, eineTabellenkalkulation, 3d-Geometrie und ein Statistiktool integriert.

Die möglichen Anwendungen in der Analysis, der Stochastik, der Vektorgeometrie und bei Simulationen in den Naturwissenschaften machen Geogebra auch für den Schweizerischen Gymnasialunterricht interessant.

Der Kurs ist in fünf Themenblöcke gegliedert, welche Theorie und Praxis verbinden, so dass das erworbene Wissen direkt an konkreten Beispielen auf dem eigenen Laptop erprobt und angewendet werden kann.

- Funktionen mit GeoGebra erforschen
- Analysis mit Geogebra am Beispiel von Maturaufgaben
- Modellierung dynamischer Systeme am Beispiel von Wachstumsprozessen
- Einsatzszenarien: Vom GeoGebra auf dem Desktop zu mobilen GeoGebra-Apps im Browser
- Nach Absprache: Statistik (deskriptive und beurteilende) und 3-D-Geometrie

Technische Voraussetzung: Eigenes Notebook mit vorinstalliertem GeoGebra in der aktuellen Version. Der Download ist möglich von http://geogebra.org/cms/de/download

Zielpublikum:	Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik
Referenten:	Dr. Torsten Linnemann, Dozent für Mathematikdidaktik an der PH FHNW Dr. Martin Guggisberg, Dozent für Informatikdidaktik an der PH FHNW
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Dr. Meike Akveld (ETH), Kerstin Quatember (DMK)
Datum und Zeit:	Freitag, den 6. November 2015, 9.30 Uhr – 16.00 Uhr
Kursort:	Gymnasium Kirchenfeld, Kirchenfeldstrasse 25, 3005 Bern Zimmer 459
Kurskosten:	CHF 100.-
Anmeldung:	http://www.math.ch/DMK2015b/
Anmeldeschluss:	9.10.2015

DIE NEUEN NATIONAL INSTRUMENTS JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/labview

NI MYDAQ

Bei myDAQ von National Instruments handelt es sich um ein kostengünstiges Datenerfassungsgerät für Studierende, das überall und jederzeit Messungen und Analysen physikalischer Signale ermöglicht. NI myDAQ ist kompakt und portabel, sodass Studenten auch ausserhalb des Labors und unter Einsatz branchenüblicher Werkzeuge und Methoden praktische Erfahrungen sammeln können.
Sie können NI myDAQ als ein Digitalmultimeter, einen Funktionsgenerator, ein Oszilloskop, usw. verwenden.

DIREKT ZUM SHOP

LABVIEW FOR EDUCATION

LabVIEW ist eine leicht zu erlernende, grafikbasierte Programmiersprache und hat sich als Industriestandard für Prüf-, Mess-, Automatisierungs- sowie Steuer- und Regelanwendungen etabliert. Der Unterricht mit LabVIEW gibt Studierenden die Möglichkeit, mit einem leistungsstarken Softwarewerkzeug zu arbeiten und damit ihre Chancen auf dem Arbeitsmarkt deutlich zu erhöhen. Des Weiteren unterstützt LabVIEW, die im Unterricht häufig eingesetzte Hardware von NI myDAQ, LEGO MINDSTORMS, Vernier und fischertechnik.

DIREKT ZUM SHOP

NI VIRTUALBENCH

Die NI VirtualBench umfasst die fünf meistgenutzten Messgeräte in Einem, sodass eine einfache Inbetriebnahme gewährleistet ist. Messungen werden mit einer fortschrittlichen, modernen PC- und Tablet-basierten Benutzerschnittstelle gesammelt, grafisch dargestellt und präsentiert, sodass Studenten sofortigen Zugriff auf Ergebnisse erhalten. Die VirtualBench kombiniert somit ein Mixed-Signal-Oszilloskop mit Protokollanalyse, einen Funktionsgenerator, ein Digitalmultimeter, ein regelbares Gleichstromnetzteil und digitale I/O-Schnittstellen in einem einzigen Gerät.

DIREKT ZUM SHOP

NATIONAL INSTRUMENTS™

Möchten Sie mit uns in Kontakt bleiben und über unsere neusten Aktivitäten informiert werden? Dann registrieren Sie sich unter www.educatec.info für unseren Newsletter.

Alle unsere Kataloge finden Sie online unter shop.educatec.ch/werbematerial

EducaTec AG
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educaTEC

DPK

Seilreibung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Immer wieder lag das Frottiertuch, das ich im Badezimmer über die Stange gehängt hatte, beim nächsten Besuch am Boden. Ich hatte schon die Kinder in Verdacht, meine Ordnung zu sabotieren, aber ein kleiner Versuch hat mich eines Besseren belehrt, siehe Abbildung 1.

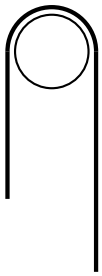


Abbildung 1: Ein trockenes Frottiertuch hängt über einer runden Stange (im Querschnitt gezeichnet). Die Enden hängen unterschiedlich tief. Das Tuch wiegt 300 g, ist 102 cm lang und 51 cm breit. Wenn das eine Ende 25 cm tiefer hängt als das andere, beginnt das Tuch zu rutschen.

Das Problem des rutschenden Frottiertuchs ist praktisch identisch mit jenem der Seilreibung, bei dem ein Seil teilweise oder mehrmals um eine zylindrische Achse geschlungen wird. Der Effekt ist 1717 vom französischen Brücken- und Wegebauinspektor Hubert Gautier beschrieben und experimentell untersucht worden.[1] Er schlang Schnüre mit Gewichten an den Enden um horizontale Achsen und mass, welcher Gewichtsunterschied durch die Seilreibung noch aufgefangen werden konnte. Die Aufgabe ist durch Leonhard Euler 1762/1769 formal gelöst worden. Die Lösung ist durch den preussischen Wasserbauingenieur Johann Albert Eytelwein mit seinem 1808 veröffentlichten Handbuch popularisiert worden. Seilreibung zeigt sich spektakulär, wenn ein grosses Schiff durch ein Tau, das einige Male um einen Poller geschlungen wird, von einer einzelnen Person festgehalten werden kann. Sie ermöglicht auch die Top-Rope Sicherung in der Kletterhalle. In der Seefahrt werden die Winsch und der Ankerspill, die ebenfalls auf Seilreibung beruhen, als mechanische Kraftverstärker verwendet.

2 Theorie

Wir betrachten ein dünnes, flexibles Seil (oder das Frottiertuch), das um eine Stange gelegt ist (Abbildung 2).

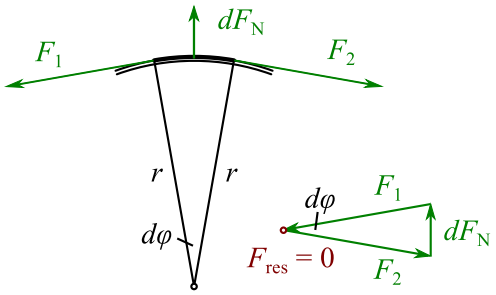


Abbildung 2: Ein Seil ist um eine Stange mit Radius r gelegt. Ein infinitesimales Seilstück der Länge $rd\varphi$ erfährt im Gleichgewicht die Kräfte F_1 und F_2 in Seilrichtung und die infinitesimale Normalkraft dF_N in radialer Richtung. Im Gleichgewicht heben sich diese Kräfte auf und es gilt $F_1 = F_2 = F$ und $dF_N = Fd\varphi$.

Falls, wie beim unsymmetrisch aufgehängten Frottiertuch, die Spannkräfte von links und rechts nicht gleich gross sind, muss der Unterschied durch Reibung kompensiert werden, sonst herrscht kein Gleichgewicht mehr.

Entlang eines infinitesimalen Seilstücks nimmt dann die Spannkraft um dF zu oder ab, wobei diese Veränderung gleich der Reibungskraft $dF_R = \mu\, dF_N$ ist. Die Grösse μ ist der Reibungskoeffizient. Somit gilt

$$dF = dF_R = \mu\, dF_N = \mu F d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{dF}{F} = \mu \int d\varphi \quad \Rightarrow \tag{1}$$

$$\ln \frac{F}{F_0} = \mu\varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad F = F_0 \exp(\mu\varphi) \tag{2}$$

Die Integrationskonstante F_0 ist die Zugkraft an jener Stelle, wo das Seil die Achse erstmals berührt. Die Kraft F ist die Zugkraft dort, wo das Seil den Kontakt zur Achse wieder verliert. Der Unterschied $F - F_0$ wird durch die Seilreibung aufgefangen. Offenbar wächst die Kraft F exponentiell mit der Anzahl Windungen respektive dem Windungswinkel φ an. Dieses exponentielle Wachstum erklärt die Effektivität von Poller und Co.[2]

3 Frottiertuchfall

Die Euler-Eytelwein Gleichung (2) gestattet es, mein Problem mit dem rutschenden Frottiertuch noch etwas weiter zu analysieren. Der in Abb. 1 links hängende Teil des Frottiertuchs ist etwa $l_0 = 38\,\text{cm}$ lang und zieht mit $F_0 = 1.1\,\text{N} \propto l_0$ nach unten. Das längere Stück ist ungefähr $l = 63\,\text{cm}$ lang und belastet die Stange mit $F = 1.8\,\text{N} \propto l$. Bei dieser Asymmetrie wird die maximale Haftreibungskraft erreicht respektive überschritten. Das Tuch liegt über einen Winkel von $\varphi = \pi$ an der Stange. Damit folgt für den Haftreibungskoeffizienten

$$\mu_H = \frac{1}{\varphi} \ln \frac{F}{F_0} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{63\,\text{cm}}{38\,\text{cm}} = 0.16 \tag{3}$$

Das ist nun in der Tat wenig. Vielleicht sollte ich die Stange gummieren.

4 Experiment zur Seilreibung

Nach dieser kleinen Rechnung las ich zufällig von einem Schülerexperiment zur Seilreibung.[3] Ich habe es 'quick and dirty' nachgestellt: Eine Schnur wurde um eine horizontale Stahlstange geschlungen. Am einen Ende hing eine Last (100 g, d.h. $F_0 = 1.0\,\text{N}$), am andern zog ich mit einen Kraftmesser. Die Zugkraft F, welche die Last gleichmässig hebt, wächst tatsächlich exponentiell mit dem Umschlingungswinkel, siehe Abbildung 3. Die Exponentialfunktion hat als einzigen Fitparameter den Gleitreibungskoeffizienten $\mu_G = 0.14$.

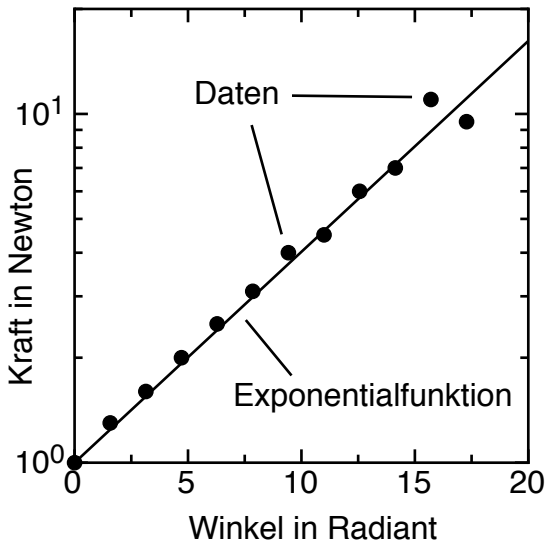


Abbildung 3: Zugkraft F versus Windungswinkel φ. Man beachte die semilogarithmische Skalierung.

[1] S. M. Holzer, "Das Euler-Eytelwein-Problem", 2005, Universität der Bundeswehr München, abgerufen via Internet (13. April 2015)

[2] E. Levin, "Friction experiments with a capstan", Am. J. Phys. 59 (1), Jan. 1991, 80-84

[3] R. McGrew, "A Simple Mechanical Experiment on Exponential Growth", Phys. Teach. 63, April 2015, 222-223

30. April 2015, Lie.

IYPT 2015 & SYPT 2016

Samuel Byland (Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch)

Bericht vom International Young Physicists' Tournament 2015

Das *International Young Physicists' Tournament 2015* fand vom 27. Juni bis 4. Juli 2015 in Nakhon Ratchasima (Thailand) statt. Trotz monatelanger intensiver Vorbereitung an freien Abenden und am Wochenende gelang unseren drei Schülerinnen und zwei Schülern der Einstieg ins Turnier leider nicht wie erhofft. Das Team liess den Kopf dennoch nicht hängen, sondern steigerte sich von Runde zu Runde und konnte sich letztlich bis auf den guten 11. Platz von 27 Nationen vorkämpfen. Damit wurde auch das angestrebte Ziel einer Bronzemedaille als Lohn für einen Platz in der vorderen Hälfte der Rangliste klar erreicht. Unsere engagiert kämpfende „Fünf" darf stolz auf ihre Leistung sein!

Die Verantwortlichen und die zahlreichen Helfer der gastgebenden Suranaree University of Technology überzeugten während des ganzen Turniers mit einer perfekten Organisation und trugen so wesentlich zu einem unvergesslichen Anlass bei. Die Ausflüge zu historischen und zeitgenössischen Tempelanlagen und eindrücklichen Nationalparks zeigten ein vielseitiges Bild einer Region Thailands, die vom (internationalen) Tourismus kaum Beachtung findet.

Abbildung 1: Das erfolgreiche Schweizer Team (v.l.n.r.: S. Byland, L. Heimbach, E. Schertenleib, M. Bitterli, P. Barth, M. Rogenmoser, K. Laxhuber und D. Keller)

Aufruf: Swiss Young Physicists' Tournament 2016

Die Weiterentwicklung und Ausweitung des nationalen Wettbewerbes liegt uns nach wie vor sehr am Herzen. Beim SYPT werden nicht nur wissenschaftliche Spitzenleistungen erwartet. Auch durchschnittliche Schülerinnen und Schüler empfinden die Erforschung offener physikalischer Fragestellungen und natürlich die Teilnahme am Turnier als spannende Herausforderung. Damit sich das SYPT zu einem Anlass von nationaler Bedeutung entwickeln kann, sind wir darauf angewiesen, dass noch mehr motivierte Kolleginnen und Kollegen aus der ganzen Schweiz versuchen, in ihren Klassen Schülerinnen und Schüler dafür zu begeistern.

Für eine Teilnahme als Team beim SYPT bearbeiten drei Schülerinnen/Schüler je eines der aktuellen Probleme (siehe [3]). Mindestens ein wichtiger Aspekt der Fragestellung sollte sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht und für andere Teilnehmende verständlich erklärt werden. Bei der Präsentation und Diskussion der Resultate während des SYPT kommen neben physikalischen Aspekten auch kommunikative Fähigkeiten zum Tragen. Die Arbeit an einem IYPT-Problem lässt sich später auch sehr gut im Rahmen einer Maturitätsarbeit oder für ein Projekt bei Schweizer Jugend forscht ([4]) weiterführen.

Es freut uns, dass wir für das **SYPT 2016** mit der **ETH Zürich** erneut einen äusserst attraktiven Austragungsort für das am **1./2. April 2016** stattfindende Turnier finden konnten. Wir hoffen sehr, dass wir dort auch Teams von Schulen begrüssen dürfen, welche zum ersten Mal teilnehmen.

Wichtige Informationen zum SYPT findet man auf unserer Webseite (www.sypt.ch), insbesondere in der Turnierbroschüre. Es würde uns freuen, wenn Sie die Klassen an Ihrer Schule kurz über den Anlass informieren würden. Vielleicht können Sie einige der Probleme sogar für Projektarbeiten in Ihrem Unterricht oder in anderen dafür geeigneten Gefässen einsetzen. Gerne stellen auch ehemalige Teilnehmerinnen und Teilnehmer das SYPT direkt an Ihrer Schule vor.

Falls Sie (bzw. Ihre Schüler/-innen) sich fürs SYPT interessieren, wenden Sie sich bitte direkt an mich (samuel.byland@sypt.ch). Falls eine Teilnahme beim SYPT 2016 geplant ist, bitten wir um eine provisorische **Voranmeldung bis Ende 2015**. Der **definitive Anmeldeschluss ist Sonntag, 31. Januar 2016**.

Das Wichtigste in Kürze

Datum: 1./2. April 2016

Ort: ETH Zürich

Anmeldung (provisorisch) bis Ende 2015 an samuel.byland@sypt.ch

Links

[1] Swiss Young Physicists' Tournament (www.sypt.ch)

[2] International Young Physicists' Tournament (iypt.org)

[3] Problemstellungen für SYPT/IYPT 2016 (iypt.org/images/e/ef/problems2016.pdf)

[4] Schweizer Jugend forscht (sjf.ch)

Fire Hose

Eric Schertenleib, MNG Rämibühl, eric.schertenleib@sypt.ch

1 Introduction

While watering your garden you may have observed that a water hose can start to oscillate wildly once released. Readers familiar with astrophysics may also be acquainted with the fire hose instability, which causes an elongated galaxy to buckle along its long axis [1]. The analogy with the phenomenon you can observe in your back yard gave name to the astrophysics version. The mechanisms behind this behaviour will be discussed throughout this paper. The aim is to explain when this characteristic motion starts (onset) and to give a brief insight into the dynamics of the phenomenon. The derived model is in good agreement with the experimental results.

Work on similar topics has previously been conducted by Hansen [2], Doaré and Langre [3] and several others. However, their work is not specifically focused on the above problem. In addition, this paper provides a more intuitive and conceptual understanding of the phenomenon.

This problem has also been released for the International Young Physicists' Tournament (IYPT) 2013 in Taiwan [4]. The exact task reads:

"Fire Hose: Consider a hose with a water jet coming from its nozzle. Release the hose and observe its subsequent motion. Determine the parameters that affect this motion."

2 Theory

We will first explain how the motion starts (onset) and then investigate the dynamics of this phenomenon.

2.1 Onset

First, it is important to notice that the diameter of the hose is commonly larger than the diameter of the nozzle. As a consequence a change of momentum occurs, as the fluid must flow faster through a narrower cross section. This in return then leads to a force, which we will denote with F_r, acting on the hose (in opposite direction of the flow).

Let p denote the momentum of the fluid, v its velocity and $Q = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{dm}{dt}$ the flow rate. With that we get

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = \rho Q v + \sum_i F_{i,\,ext} = 0. \tag{1}$$

As the flow rate is a constant and the external force is equal to F_r we arrive at

$$|dF_r| = \rho Q dv \Rightarrow |F_r| = \rho Q(v_n - v_i) = \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_i}\right), \tag{2}$$

where the index n refers to the nozzle and i to the hose and A is the respective cross sectional area. Note that we have used the relation $Q = vA$.

The force needed for buckling is well documented in literature (see for example [5]). In our case one end is fixed and the other is free to move laterally. Then the buckling constant is known to be $K = 2$ so that we get

$$F_B = \frac{\pi^2 YI}{(Kl)^2} = \frac{\pi^2 YI}{4l^2}, \tag{3}$$

with Y being the modulus of elasticity, I the area moment of inertia and l the length of the hose.

When the hose is lying on a flat substrate we also observe a friction force F_F. For our case we assume the the friction force is a constant c (static friction). Together with equation (2) and (3) we can then set up a relation for the motion onset:

$$F_r = F_F + F_B \Leftrightarrow \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_i}\right) = c + \frac{\pi^2 YI}{4l^2}. \tag{4}$$

Equation (4) is compared to the experimental results in figure 3a.

2.2 Oscillation

As the reader may have already observed himself, the hose performs an oscillatory motion. It turns out that once the onset occurs, one first observes a harmonic oscillation. When increasing the flow rate and/or the length, one will then observe higher modes. In this paper only the first mode will be derived in detail and a qualitative explanation for the mode jumps will be presented.

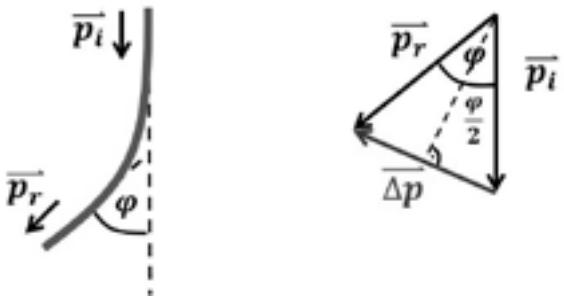


Figure 1: *Once the hose buckled there exists a curve segment along the hose. This forces the fluid to change its direction resulting in a restoring force acting on the hose. This causes the hose to oscillate.*

As soon as the hose buckles it will have a curvature. This forces the fluid to change direction along its path. Thus the fluid will push the hose back and act as a restoring force. This force drives the oscillation (see figure 1 and 3b). Knowing this we can quantify the restoring force F_k arising due to this momentum change:

$$F_k = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{dp}{dt} = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rho Q v = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\rho Q^2}{A} \tag{5}$$

Now torque balance can be applied. Note that J stands for the moment of inertia.

$$-\frac{d^2\varphi}{dt^2}J = \frac{l}{2}F_k = l\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\rho\frac{Q^2}{A} \tag{6}$$

Solving the ODE using small angle approximation yields

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{l\rho Q^2}{2AJ}\varphi = 0 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2AJ}{l\rho Q^2}} \Rightarrow T \propto \frac{1}{Q} \wedge T \propto l \tag{7}$$

For the second proportionality we have used the fact that the moment of inertia for a tube with length l and a constant linear mass density is proportional to l^3. The second proportionality from equation (7) is compared to the experimental data in figure 4b.

We now want to investigate the mode jumps. Let us first consider the case of a hose of constant length l. The hose is fixed on one end and is allowed to move freely on the other. As for standing waves on a string we get

$$\text{mode}\,0:\ l = \frac{\lambda_0}{4} \Rightarrow f_0 = \frac{c}{4l}, \qquad \text{mode}\,i:\ l = \frac{(2i+1)\lambda_i}{4} \Rightarrow f_i = \frac{c}{4l}(2i+1) = f_0(2i+1) \tag{8}$$

for the frequency f with c denoting the propagation speed of the wave and λ the wavelength.

We now consider the case of a fixed flow rate. As seen in section 2.1 one can find the minimal length at which the hose starts to oscillate for a fixed length. Let l_0 denote this onset length. When gradually increasing the hose length we observe an interesting feature: At $3l_0$, $5l_0$, $7l_0$, ... we observe a mode jump. A schematic representation can be seen in figure 2.

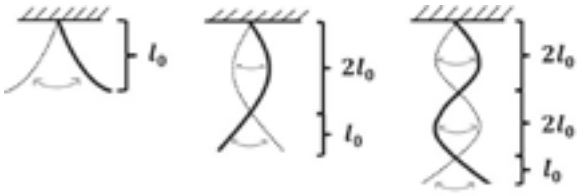


Figure 2: *Schematical representation of the higher modes when keeping the flow rate constant.* l_0 *represents the critical length at which the onset occurs for a given flow rate.*

The corresponding dominating frequency after a mode jump can again be derived easily using standing waves theory. We define the wavelength of the first mode λ_0 as $4\,l_0$. Let $l_i = (2i+1)l_0$ be the length of the hose when it jumps into the (i+1)-th mode. f_i^j symbolizes the (j+1)-th multiple of the fundamental frequency f_i^0 of the (i+1)-th mode. λ_i denotes the wavelength belonging to f_i^j.

$$l_1 = 3l_0 = \frac{3\lambda_0}{4} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{4}{3}l_1 \Rightarrow f_1^1 = \frac{3c}{4l_1} = f_0^0 \Rightarrow f_1^0 = \frac{c}{12l_0} = \frac{f_0^0}{3} \tag{9}$$

The last implication follows from $l_0 = \frac{\lambda}{4} \Leftrightarrow f_0^0 = \frac{c}{4l_0}$ and equation (8). For the general case we again get

$$l_i = (2i+1)l_0 = \frac{(2i+1)\lambda_i}{4} \Rightarrow \lambda_i = \frac{4}{2i+1} l_i \Rightarrow f_i^i = f_0^0 \Rightarrow f_i^0 = \frac{c}{(2i+1)4l_0} = \frac{f_0^0}{2i+1}. \qquad (10)$$

3 Materials and Methods

The experiments were conducted using two hoses of different elasticity. The parameters that were varied are the flow rate and the length of the hose. "Logger Pro" was used to track the motion of the hose. The fire hose motion was observed on a low friction plate.

4 Experimental Results

The errors shown in the plots are estimated errors.

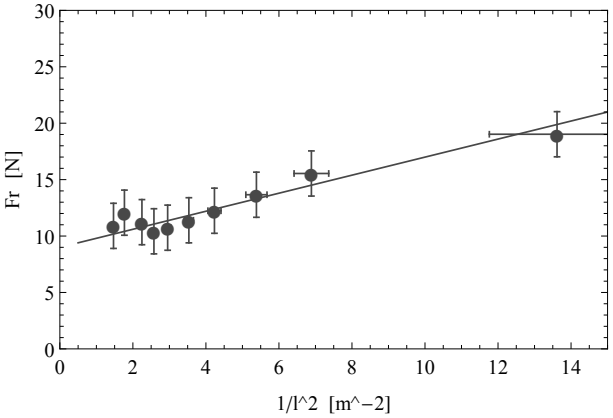


Figure 3a: *Experimental verification of equation (4). The offset due to friction is a fit parameter. The used hose has the property* $YI = (0.32 \pm 0.02) Nm^2$.

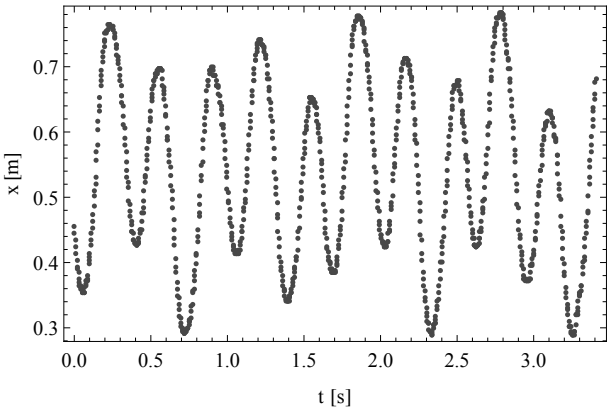


Figure 3b: *Tracking data of the hose obtained with "Logger Pro". Typical oscillation movement the hose performs.*

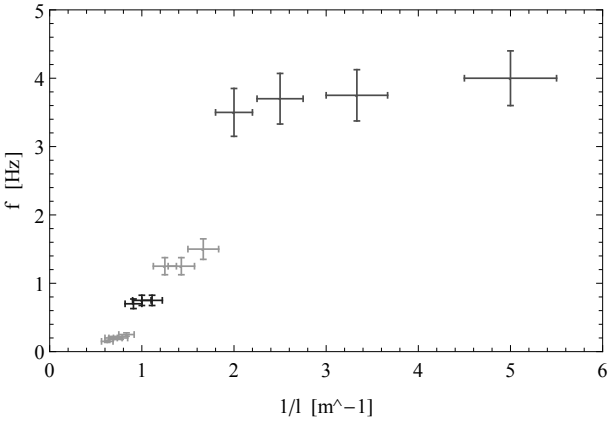


Figure 4a: *Observed fundamental frequencies* f_i^0 *depending on different lengths l for a constant flow rate. One can clearly see the characteristic mode jumps discussed in 2.2. Note that the data point on the top right corresponds to the onset.*

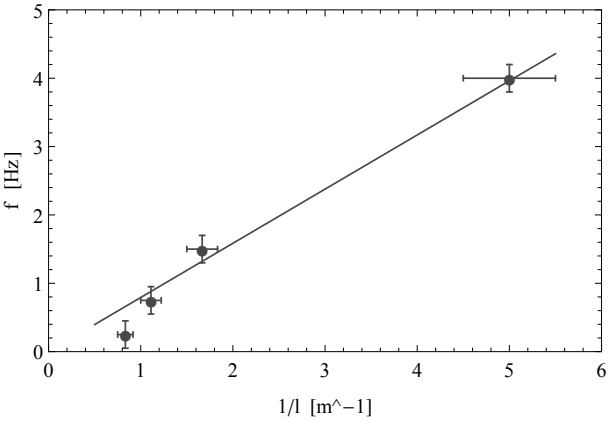


Figure 4b: *Data and linear fit function of the fundamental frequency* f_i^0 *immediately after a mode jump. Note that the point on the top right is* f_0^0. *The frequency after the jump and the length at which it occurs can be estimated using equation (10).*

5 Discussion

A robust model describing the onset was derived in section 2.1. The onset is explained through the diameter change between hose and nozzle, but you may still observe this motion even without a nozzle. This is a consequence of hoses already having an initial curvature due to its storage method (rolled up). However, if a nozzle is present the first effect will be dominant.

As previously discussed one eventually will observe a mode jump when one takes a hose of fixed length and gradually increases the flow rate. Hence, one can also experimentally verify the relation $f \propto Q$. However, due to limitations (most commonly flow rate limited by the onset as lower bound and bursting of the hose as upper bound) it is not possible to observe several jumps with this technique. So it is easier to keep the flow rate constant and increase the length instead.

A more detailed investigation of the dynamics and in particular a precise equation of motion could be derived. For example, all damping terms in equation (7) were neglected as it was only used to obtain an expression for the frequency. A further investigation on this non-linear, damped, driven oscillation and the subsequent mode jumps is highly intriguing, but clearly lies beyond the scope of this paper.

6 Conclusion

In section 2.1 we described the basic mechanism behind the onset using force balance. It is shown that the oscillation starts once the hose buckles. The model is in good agreement with the experimental data. In addition, a conceptual and intuitive explanation for the mode jumps is presented. The predicted frequency jumps are experimentally observed.

7 References

[1] D. Merritt, *Dynamics of Elliptical Galaxies*, 1993, Science, vol. 259.

[2] R.J. Hansen, *An Experimental Study of the Flow-Induced Motions of a Flexible Cylinder in Axial Flow*, 1978: Journal of Fluids Engineering, vol. 100.

[3] O. Doaré, E. d. Langre, *The Flow-Induced Instability of long hanging Pipes*, 2002: European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 21.

[4] *Problems for the IYPT 2013*, http://archive.iypt.org/problems/.

[5] J. M. Gere, *Mechanics of Materials 6th edition*, 2004: Thomson Learning Inc., p. 773.

DPK Deutschschweizerische Physikkommission des VSMP

ETH Eidgenössische Technische Hochschule Zürich Swiss Federal Institute of Technology Zurich

16. Schweizerischer Tag für

Physik und Unterricht

Freitag, 13. November 2015, 13:00 - 17:30 Uhr an der ETH Zürich

Themen: Ultraschnelle Prozesse auf molekularer Ebene und formative Beurteilung im Physikunterricht

12:30 - 13:00	Begrüssungskaffee
13:00 - 13:05	**Begrüssung zum Anlass,** *Andreas Vaterlaus, ETHZ*
13:05 - 13:45	**Die genauesten Uhren der Welt** *Prof. Ursula Keller, ETH Zürich.*
13:50 - 14:30	**Über "lange" und "kurze" Photonen** *Prof. Thomas Feurer, Universität Bern.*
14:30 - 15:00	**Kaffeepause mit Austauschmöglichkeit**
15:00 - 15:40	**Atmosphärische Anwendungen von Ultrahochleistunglasern** *Prof. Dr. Jean-Pierre Wolf, Universität Genf.*
15:45 - 16:25	**FA-Projekt, Ergebnisse der ETH Studie** *Dr. Clemens Wagner / Andreas Lichtenberger, ETH Zürich*
16:30 - 17:30	**Labor Führung**
17:30 – 18:00	**Apéro**

Treffpunkt (provisorisch)

Ort:	ETH Hönggerberg (Erreichbarkeit: https://www.ethz.ch/de/campus/standorte-anreise/standorte-ZH/hoenggerberg.html)
Gebäude:	HPF
Stockwerk:	G
Raum:	6 (Seminarraum)

Anmeldung:

Mailen, faxen oder schicken Sie die Anmeldung bitte spätestens bis zum 01. November 2015 an:
Andreas Vaterlaus, ETH Hönggerberg HPF G4.1 , 8093 Zürich.
FAX 044 633 1623
Email: vaterlaus@phys.ethz.ch
(für eine frühzeitige, evtl. auch provisorische Anmeldung sind wir sehr dankbar!)
Kosten: keine

Angaben:
Name und Vorname: ……..

Schule: …….. Email: ……..

Empilement de cercles (I)

Shaula Fiorelli Vilmart, Université de Genève, shaula.fiorelli@unige.ch

Résumé : La *conjecture de Kepler* [1] est une hypothèse relative à la densité maximale occupée par certains objets, comme par exemple un arrangement de disques de même diamètre dans un plan. Il a fallu plus de trois siècles à la communauté mathématique pour mener des recherches, apparemment sans lien entre elles et qui pourtant ont conduit à une démonstration irréfutable de cette affirmation.

Introduction

Comment ranger de manière optimale des bocaux dans un placard ? Si vous posez cette question à un scientifique, il vous bombardera de questions : Qu'entend-on par optimal ? Est-ce qu'on tient compte du bord du placard ? Est-ce qu'on peut empiler les bocaux ? Est-ce que tous les bocaux ont le même diamètre ? … Précisons donc la question : comment arranger de manière la plus dense possible (et sans les empiler) des bocaux de même diamètre sur une étagère, sans tenir compte des bords du placard ? Comme on ne spécifie pas la hauteur des bocaux ni la dimension de l'étagère, un mathématicien réduira la question à son essence même, à savoir : **comment arranger des cercles dans le plan de la manière la plus dense possible.**
Pratiquement, quelques essais avec des bocaux de confiture ou des pièces de monnaie permettent de se convaincre qu'un arrangement possible consiste à placer les centres des cercles sur des sommets d'hexagones réguliers (Figure 1). **Quelle est la densité d'un tel arrangement ?** La densité est définie comme le rapport entre la surface couverte par les cercles et la surface totale. Or, si on considère un arrangement de cercles dans tout le plan, on a une infinité de cercles disposés sur une surface infinie ; pas évident de faire un tel calcul ! Ce qui rend possible le calcul de densité est le fait que l'arrangement est régulier, autrement dit quel que soit le cercle que vous choisissez, les cercles qui le touchent ont leur centre sur les sommets d'un hexagone régulier. On peut ainsi regarder seulement une partie du plan, par exemple l'hexagone défini par les centres des cercles autour d'un cercle donné. Comme les hexagones pavent le plan et que l'arrangement est régulier, on aura la même densité à l'intérieur de chaque hexagone et donc sur tout le plan.

Calcul de la densité de l'arrangement hexagonal

- Commençons par calculer la surface totale. Un hexagone régulier est formé de 6 triangles équilatéraux dont les sommets sont deux sommets consécutifs de l'hexagone et le point *O* milieu de l'hexagone (Figure 1). Si on note *r* le rayon des cercles, le côté de l'hexagone et celui du triangle, mesurent *2r*. La hauteur *h* du triangle est donnée par le théorème de Pythagore : $h = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$, car *r* est positif.
  Ainsi, l'aire de l'hexagone est donnée par :

$$A_{Hexagone} = 6A_{\Delta} = 6 \cdot \frac{2r \cdot \sqrt{3}r}{2} = 6\sqrt{3}r^2$$

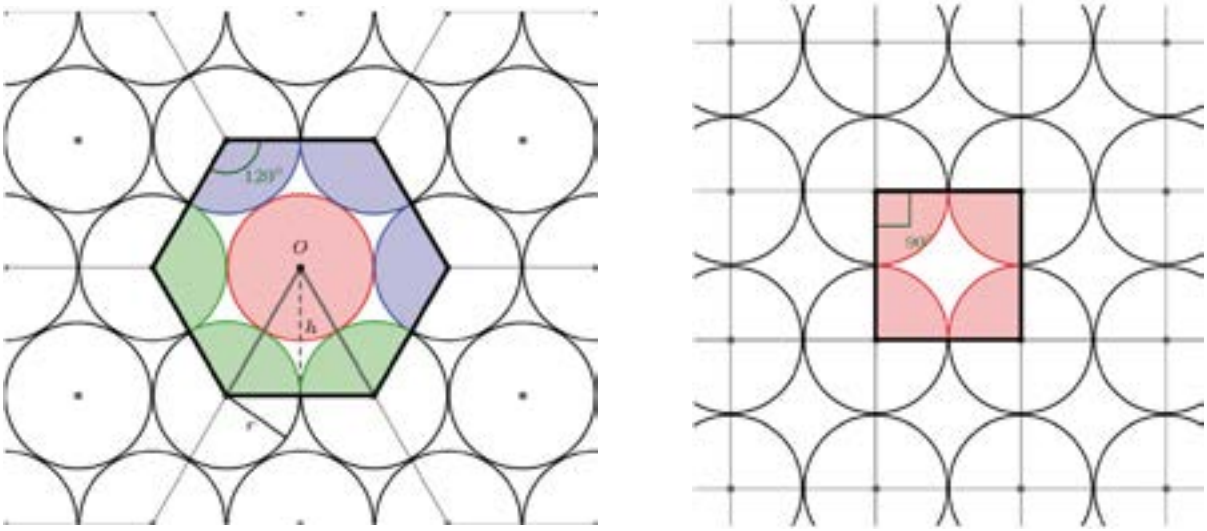


Figure 1 – L'arrangement hexagonal et l'arrangement carré

- Calcul de l'aire couverte par les cercles. A l'intérieur d'un hexagone régulier prennent place 3 cercles (1 cercle complet plus 6 secteurs d'angle 120°). Ainsi :
  $A_{couverte} = 3 \cdot A_{\circ} = 3 \cdot \pi r^2$

- Finalement, la densité *D* est donnée par : $D = \frac{A_{couverte}}{A_{Hexagone}} = \frac{3 \cdot \pi r^2}{6\sqrt{3} r^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} \cong 90{,}7\%$

- A titre de comparaison, la densité *D'* de l'arrangement carré vaut :
  $D' = \frac{A_{couverte}}{A_{Carré}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} \cong 76{,}53\%$

Avec une autre configuration, pourrait-on faire mieux ? Si vous deviez démontrer que votre arrangement est le meilleur arrangement possible, comment feriez-vous ? Par ailleurs, existe-t-il un arrangement non régulier qui pourrait être plus dense ?

L'origine du problème

En 1611, Johannes Kepler, célèbre pour ses trois lois sur le mouvement des corps célestes, décide de faire un cadeau de Noël à son ami et protecteur le Baron Wacker von Wackerfelds. Il lui écrit un petit livre intitulé *Strena, seu De nive sexangula*, dont la traduction en français est *L'étrenne ou la neige sexangulaire*. Comme le titre l'indique, Kepler se demande pourquoi les flocons de neige sont de forme hexagonale. Avant de tenter de répondre à ce problème, il s'intéresse à trois autres questions. Pourquoi les nids d'abeilles sont-ils de forme hexagonale ? Pourquoi les graines de grenades sont-elles en forme de dodécaèdres (non réguliers) ? Pourquoi les pétales de fleurs sont très souvent regroupés par cinq ?
La question sur les graines de grenades donnera lieu à un autre grand problème mathématique fortement lié à celui qui nous intéresse, à savoir quel est l'arrangement de sphères le plus dense possible. C'est dans les réflexions de Kepler sur les flocons de neige qu'est évoquée pour la première fois de l'histoire la question des arrangements de cercles. Il imagine deux explications au sujet de la forme des flocons de neige : d'une part, les

hexagones pavent le plan ; d'autre part, l'arrangement de cercles en hexagones est l'arrangement le plus dense possible. Il ne donne cependant pas de démonstration à cette deuxième affirmation ! Seule sa première hypothèse, le fait que les hexagones pavent le plan, correspond à la réalité. En effet, la forme des flocons de neige est intimement liée à la structure cristalline de la glace qui est hexagonale [2]. Comme Kepler ne donne aucune démonstration du fait que l'arrangement en hexagones est le plus dense possible, les historiens appelleront plus tard cette affirmation la *conjecture de Kepler* en dimension 2. Lorsque la dimension n'est pas précisée, on se réfère au problème à trois dimensions, à savoir : déterminer l'arrangement de sphères le plus dense possible.

Lagrange et les formes binaires quadratiques

Faisons maintenant un bond en avant dans l'histoire. Nous sommes en 1773, année de publication des *Recherches d'arithmétiques* de Joseph-Louis Lagrange [3]. L'objet de ces *Recherches* concerne les nombres entiers qui peuvent s'écrire sous la forme $Bt^2 + Ctu + Du^2$, où *B*, *C* et *D* sont des nombres entiers donnés ; *t* et *u* sont des nombres entiers indéterminés. Une telle expression est une *forme binaire quadratique*. La donnée de trois nombres entiers permet de définir une forme binaire quadratique ; il existe donc une infinité de telles formes. Lorsque deux formes quadratiques différentes permettent d'obtenir les mêmes nombres, elles sont dites *équivalentes*. Par exemple, les deux formes binaires $f(t,u) = t^2 + tu + 3u^2$ et $g(t,u) = t^2 - 3tu + 5u^2$ permettent d'obtenir les nombres suivants $0 = f(0,0) = g(0,0)$, $1 = f(1,0) = g(-1,0)$, $3 = f(-1,1) = g(-2,-1)$, $4 = f(-2,0) = g(2,0)$, $5 = f(1,1) = g(-3,-1)$, $9 = f(-3,0) = g(-4,-1)$, $11 = f(-1,2) = g(-3,-2)$, $12 = f(0,-2) = g(-2,-2)$, $15 = f(-4,1) = g(5,2)$ et une infinité d'autres. De plus, chaque nombre peut être obtenu de plusieurs manières. Par exemple $3 = f(-1,1) = f(0,-1) = f(0,1) = f(1,-1)$). Lagrange s'intéresse d'une part à reconnaître les expressions donnant les même nombres et d'autre part à trouver des représentants pour des formes binaires quadratiques fournissant les mêmes nombres. Il montre en particulier que deux formes $Bt^2 + Ctu + Du^2$ et $B't^2 + C'tu + D'u^2$ sont équivalentes si $4BD - C^2 = 4B'D' - C'^2$. Cette quantité est le *discriminant*, noté Δ, des formes quadratiques considérées. Or, parmi toutes les expressions ayant le même discriminant, on peut trouver « la plus petite », au sens où le coefficient *C* est inférieur ou égal à chacun des deux autres coefficients. Cette expression sera la *forme réduite* cherchée. Ainsi, on peut arranger toutes les formes quadratiques en des ensembles (ou *classes d'équivalences*) de formes ayant le même discriminant, et pour chaque ensemble, on a un représentant idéal qui est la forme réduite. Lagrange montre aussi que le discriminant Δ est toujours supérieur ou égal à $3B^2$ (dans notre exemple, le discriminant vaut 11 et *f* est la forme réduite).

Gauss et les réseaux

Mais quel est le lien avec nos arrangements de cercles ? Ce lien ne sera établi que 58 ans plus tard par Karl Friedrich Gauss lorsqu'il introduira la notion de réseaux en 1831 [4]. Étant

donné un point d'origine et deux vecteurs non colinéaires, on définit un réseau comme l'ensemble des points à coordonnées entières engendrés par les deux vecteurs (Figure 2). La seule donnée d'une origine et de deux vecteurs permet de définir un réseau, et comme il existe une infinité de choix d'origine et de vecteurs, il existe une infinité de réseaux. De plus, pour un réseau donné, on peut choisir n'importe quel triplet de points "proches" et définir ainsi deux nouveaux vecteurs qui engendreront le même réseau. Il en découle que pour un même réseau, il existe une infinité de vecteurs de base. Un vrai casse-tête pour différencier deux réseaux !

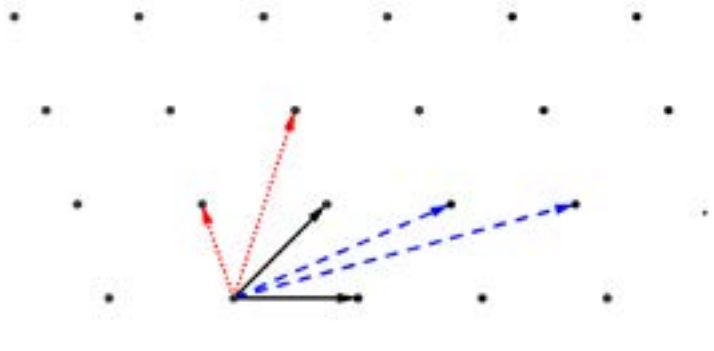


Figure 2 - Un réseau et trois couples de vecteurs qui permettent de l'engendrer

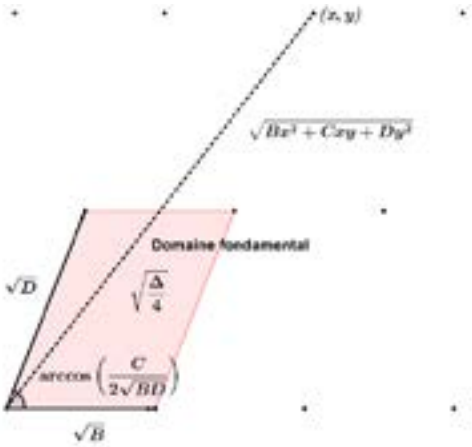


Figure 3 - Comment associer une forme binaire quadratique à un réseau

Ce que remarque Gauss est que l'on peut associer une forme binaire quadratique $Bt^2 + Ctu + Du^2$ à un réseau : les deux vecteurs de base auront une longueur respective de $\sqrt{B}$ et $\sqrt{D}$ et l'angle entre eux sera donné par $\arccos\left({}^{C}/_{2\sqrt{BD}}\right)$. De plus, l'aire du parallélogramme défini par l'origine et les deux vecteurs de base est donnée par le discriminant selon la relation $Aire = \sqrt{{}^{\Delta}/_{4}}$. Finalement (Figure 3), le carré de la distance entre l'origine et un point de coordonnées *(x,y)*, exprimées dans la base définie par les vecteurs, vaut exactement $Bx^2 + Cxy + Dy^2$ (*on a gardé ici la notation de Lagrange. Dans son article, Gauss considère des équations de la forme* $ax^2 + 2bxy + cy^2$*. Son discriminant est alors donné par* $ac - b^2$ *et l'aire d'un domaine fondamental s'exprime simplement comme* $\sqrt{\Delta}$*. Ces deux définitions sont équivalentes)*. Ainsi chaque forme binaire quadratique engendre un réseau et deux formes quadratiques équivalentes engendrent le même réseau.

Le lien entre les réseaux et nos arrangements de cercles sera présenté dans un prochain article.

Bibliographie

[1] G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, Wiley, John & Sons Inc, 2003
[2] K. G. Libbrecht, *The physics of snow crystals*, Reports on Progress in Physics, vol. 68 (14), 2005
[3] J.-L. Lagrange, *Recherches d'arithmétiques,* Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, pp. 695-795, 1773 et 1775
[4] K. F. Gauss, Besprechung des Buchs von L.A. Seeber : *Untersuchungen über die Eigenschaften der positive ternären quadratischen Formen*, Göttingsche Gelehrte Anzeugen, 1831.

Ja - Oui - Sì ☐

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und -lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/ Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG - SSPES - SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra ☐ Herr/M./Sig. ☐ Prof. ☐ Dr. ☐

Name/Nom/Cognome: ....

Vorname/Prenom/Nome: .....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): ....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo: .....

(Land/Pays/Paese): ....

Email: ..... (Tel): .....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): .....

Sprache/Langue/Lingua: D ☐ F ☐ I. ☐

Schule/école/scuola: ..... Kanton/canton/cantone: ..... .

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo ☐ passive/passif/passivo ☐
Student/in, étudiant(e), studente/ssa. ☐

Einsenden an/envoyer à/inviare a:
VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern
oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@mng.ch
Rain 14 Tel. 032 512 50 84
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen
— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:	
ganzseitig	Fr. 500.–
halbseitig	Fr. 300.–
Beilagen:	
bis 20 g	Fr. 500.–
über 20 g	nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP*:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées*:
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)
— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 130	30.11.2015 (20.01.2016)
Nr. 131	31.03.2016 (20.05.2016)
Nr. 132	31.07.2016 (20.09.2016)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch